Analitični pristopi v geometriji

Vaje

Kartezične koordinate

1. Izpelji obrazec za oddaljenost točke *T* od premice *p* s pomočjo izračuna nožišča pravokotnice iz točke *T* na premico *p*.

2. V ravnini sta dani točki $A(-2{,}0)$ in $B(0{,}0)$. Določi in skiciraj množico točk $C(x, y)$v ravnini z naslednjo lastnostjo: v trikotniku ABC težiščnica t_a seka stranico *a* pod kotom $45°$.

3. *Premeri elipse* so tetive, ki potekajo skozi središče elipse. Dokaži, da razpolovišča tetiv, ki so vzporedne danemu premeru elipse, tvorijo nov premer elipse. (Imenujemo ga prvotnemu premeru *konjugirani premer*.) Naj ima premer elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \ a > b > 0$ smerni koeficient *k*. Poišči smerni koeficient temu premeru konjugiranega premera. Sta premer in njegov konjugirani premer lahko pravokotna?

4. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujeta parabola $y = x^2$ in daljica *AB* z ogliščema *A* in *B* na tej paraboli z abscisama *a* in *b*. Račun opravi tako, da izračunaš ploščino trikotnika *ABC*, kjer je *C* točka na paraboli z absciso $\frac{a+b}{2}$. Dobljeni rezultat uporabi za iteracijo postopka in izračun zahtevane ploščine v obliki vsote vrste. Rezultat preveri z integralnim računom.

5. Naj bo *F* eno od gorišč elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \ a > b > 0.$ Določi množico vseh središč tetiv skozi točko *F.*

6. Izberimo, poljubno točko *M* na enakostraničnemu trikotniku *ABC* očrtani krožnici. Dokaži, da je vrednost izraza $|MA|^4 + |MB|^4 + |MC|^4$ neodvisna od izbire točke *M*.

7. Lestev je prislonjena ob navpično steno in na klinu na dveh petinah lestve od spodaj navzgor sedi mačka. Nekdo lestev od spodaj izmakne, da začne z zgornjim krajiščem drseti po steni, s spodnjim pa stran od stene. Ugotoviti, kakšno krivuljo pri tem opiše mačka.

8. *Tangentni štirikotniki*. Dan je trikotnik *ABC*. Nariši in določi geometrijsko lego točk *D*, za katere je *ABCD* tangentni štirikotnik. Pred konstrukcijo v GeoGebri in pred izračunom enačbe krivulje bomo potrebovali naslednja dva rezultata.
   a. Štirikotnik *ABCD* s stranicami *a,b,c,d* je tangentni natanko tedaj, ko velja *a+c=b+d*.
   b. Štirikotnik *ABCD* je tangentni natanko tedaj, ko se včrtani krožnici trikotnikov *ABC* in *ACD* dotikata diagonale *AC* v isti točki.

9. Dani sta točki A(-4,0) in B(4,0). Določi množico vseh točk P(x,y) v ravnini, za katere je kot $\measuredangle PAB$ dvakratnik kota $\measuredangle PBA$. Ali vse točke na dobljeni stožnici zadoščajo zahtevanemu pogoju? Če ne, kaj je značilno za te dodatne točke na stožnici?

10. Analiziraj stožnico $6x^2 + 4xy + 9y^2 + 28x - 14y + 41 = 0$. Ugotovi njen tip, središče, polosi in glavne smeri.

11. V družini poišči vse prave parabole in jih skiciraj:
$$(1+\lambda^2)(x^2+y^2) - 4\lambda\, xy + 2\,\lambda\,(x+y) + 2 = 0.$$
Rešitev preveri tako, da družino narišeš v GeoGebri. Pomagaj si z drsnikom.

12. V GeoGebri konstruiraj enoparametrično družino stožnic, očrtanih danemu štirikotniku *ABCD*, pri čemer nastopajoči parameter upravljamo preko drsnika *t*.

13. Konstruiraj stožnico, ki poteka skozi oglišča danega trikotnika *ABC* in katere središče je težišče *G* tega trikotnika. Z računom na podlagi 6*x*6 determinante preveri, da ima v konstrukciji dobljena stožnica res središče *G*.

Homogene kartezične koordinate

1. Ugotovi, ali v družini premic p_λ: $\lambda(\lambda-1)X + (\lambda-1)(\lambda-2)Y + \lambda(\lambda-2)Z = 0$ obstaja premica, vzporedna premici skozi točki T_1 = 7: -3 : 1 in T_2 = 1:1:3.

2. Dana je stožnica $AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXZ + 2EYZ + FZ^2 = 0$.
   a. Ugotovi, koliko ima ta stožnica presečišč s premico v neskončnosti. Kako je to število odvisno od tipa stožnice? (Namig: *X*:*Y*).
   b. Za tipične stožnice določi njihova presečišča s premico v neskončnosti.

3. S pomočjo Joachimstahlove enačbe določi presečišče stožnice
$$2X^2 + XY + 2Y^2 - 6XZ - 6YZ + 4Z^2 = 0$$
s premico skozi točki 3:1:1 in 1:3:1. Komentiraj rezultat.

4. S pomočjo teorije polar in polov poišči enačbi tangent iz točke P(-1, -3.5) na stožnico
$$3X^2 + 8XY - 3Y^2 + 6XZ + 8YZ - 4Z^2 = 0.$$

5. Dano imamo stožnico *S*. Dokaži:
   a. Točka *A* leži na svoji polari natanko tedaj, ko *A* leži na stožnici *S*.
   b. Premica *p* vsebuje svoj pol natanko tedaj, ko je tangenta na stožnico *S*.

6. Na podlagi teorije polov in polar določi središče hiperbole
$$-10\,\mathrm{X}^2 + 16\,\mathrm{XY} - \mathrm{Y}^2 + 68\,\mathrm{XZ} - 76\,\mathrm{YZ} - 106\,\mathrm{Z}^2 = 0.$$

Kompleksna števila

1. Za števili $u, b \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, definirajmo $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f_{u,b}(z) = u\,z + b$.
   a. Zrcaljenje Z_c preko točke $c \in \mathbb{C}$ predstavi s preslikavo oblike $f_{u,b}$.
   b. Kateri znani transformaciji ravnine je enak kompozitum $Z_c \circ Z_d$ zrcaljenj preko točk $c, d \in \mathbb{C}$?
   c. Naj bodo a, b, c, d oglišča paralelograma. Določi kompozitum $Z_d \circ Z_c \circ Z_b \circ Z_a$ zrcaljenj preko točk *a, b*, *c* in *d*.

2. Jakec na podstrešju najde staro skrinjo, v kateri so shranjene skrivnostne listine. Kmalu spozna, da je na eni od njih načrt, ki vodi do zaklada, ki je zakopan na nekem otoku. Navodilo je naslednje.

   Na otoku sta dve veliki drevesi, bor in hrast. Tam je tudi visok drog za izobešanje zastave. Postaviš se k drogu, korakaš do bora, se obrneš za 90° v desno in korakaš naprej toliko korakov, kot si jih prej opravil od droga do bora. Točko, kamor prispeš, označiš z *A*. Nato se vrneš k drogu, korakaš do hrasta, se obrneš za 90° v levo in spet nadaljuješ toliko korakov, kot si jih prej opravil od droga do hrasta. Tokrat točko označiš z *B*. Zaklad se nahaja v razpolovišču daljice *AB*.

   Jakec se loti raziskovanja in z deskanjem po internetu najde otok oblike, kot je bil na zemljevidu. Ko prispe na otok, opazi, da sta tam še vedno dve visoki drevesi, bor in hrast. Droga pa ni več. Z uporabo kompleksnih števil pomagaj Jakcu najti zaklad.

3. Dan je trikotnik *ABC*, katerega oglišča so podana s kompleksnimi števili $a, b, c \in \mathbb{C}$.
   a. Nad stranico *AB* z zunanje strani konstruiramo enakostranični trikotnik *APB*. Določi kompleksno število *p,* ki določa točko *P* in kompleksno število *q,* ki določa razpolovišče *Q* daljice *CP.*
   b. Kateri znani transformaciji ravnine je enak kompozitum rotacij $\rho_b \circ \rho_c \circ \rho_a$ okrog točk *a*, *c*, in *b*, vsakič za kot 60°.

4. V kompleksni ravnini so dane nekolinearne točke *a,b,c*. Določi točko *u* tako, da bosta trikotnika *abc* in 01*u* direktno podobna. Rezultat geometrijsko pojasni.

5. Dokaži *Thebaultov izrek*: Nad stranicami paralelograma *ABCD* z zunanje strani konstruiramo kvadrate. Potem so njihova središča oglišča novega kvadrata.

6. Vemo že, da če je ω osnovni tretji koren enote, potem je pogoj $\omega^2 z_3 + \omega z_2 + z_1 = 0$ ekvivalenten dejstvu, da so z_1, z_2, z_3 oglišča pozitivno orientiranega enakostraničnega trikotnika. Premisli, čemu je ekvivalentno dejstvo $\omega^3 z_4 + \omega^2 z_3 + \omega z_2 + z_1 = 0$, pri čemer je ω tokrat osnovni četrti koren enote. Na ta način dokaži Van Aubelov izrek. Dokaži tudi posplošitvi tega rezultata za podobne rombe in podobne pravokotnike.

7. Ugotovi, kaj lahko rečemo o dvorazmerju štirih kolinearnih točk. Upoštevaj ugotovljeno dejstvo in z njim dopolni izrek o konciklčnosti štirih točk v ravnini.

8. Konciklčnost točk na krožnici devetih točk dokaži še z uporabo dvorazmerij.

Trilinearne koordinate

1. Naj bo $A'B'C'$ središčni trikotnik trikotnika ABC in S_p središče včrtane krožnice trikotnika $A'B'C'$. Točko S_p imenujemo *Spiekerjeva točka* trikotnika ABC. V Kimberlingovi ETC nosi oznako $X(10)$. Izpelji trilinearne koordinate te točke.

2. Izpelji trilinearne koordinate Fermatove točke X(13) in prve Napoleonove točke X(17).

3. Izpelji enačbe vzporednic k stranicam trikotnika ABC skozi nasprotna oglišča. Izpelji tudi trilinearne koordinate presečišč parov teh vzporednic.

4. Za poljubno točko P znotraj trikotnika ABC presečišča premic AP, BP, CP z nosilkami stranic a,b,c označimo z A_P, B_P, C_P. Trikotnik $A_PB_PC_P$ imenujemo *Cevov trikotnik točke P*.
   a. Pri danih trilinearnih koordinatah točke $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$ določi trilinearne koordinate oglišč A_P, B_P, C_P.
   b. Določi trilinearne koordinate razpolovišč stranic in nožišč višin trikotnika ABC.
   c. Zapiši enačbe simetral stranic.

5. Izpelji trilinearne koordinate točke Mittenpunkt $X(9)$, ki je presečišče premic skozi razpolovišče stranice trikotnika in središča ustreznih pričrtanih krožnic. Podobno pri danih trilinearnih koordinatah točk P in Q izpelji koordinate P-Cevove transformiranke točke Q.

6. Dotikališča včrtane krožnice trikotnika ABC s stranicami a,b,c označimo z X, Y, Z.
   a. Določi trilinearne koordinate točk X, Y, Z.
   b. Izpelji trilinearne koordinate Gergonnove točke X(7), ki je presečišče daljic AX, BY in CZ.
   c. Dokaži, da je $|XYZ| = \frac{r}{2R} S \leq \frac{S}{4}$, kjer je S ploščina trikotnika ABC.

7. Izpelji trilinearne koordinate Nagelove točke X(8). Dokaži, da težišče G deli daljico s krajiščema I (središče včrtanega kroga) in X(8) v razmerju 1:2.

8. Naj bo $f(a,b,c) = a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$.
   a. Dokaži, da je $\alpha\, f(a,b,c) + \beta\, f(b,c,a) + \gamma\, f(c,a,b) = 0$ enačba Eulerjeve premice trikotnika ABC.
   b. Dokaži: Če razpolovišče stranice c trikotnika ABC leži na Eulerjevi premici trikotnika, potem je trikotnik bodisi pravokoten s pravim kotom pri oglišču C, bodisi enakokrak z vrhom C.
   c. Dokaži: če središče včrtane krožnice I leži na Eulerjevi premici trikotnika ABC, potem je trikotnik enakokrak.

9. Izpelji enačbo Kiepertove hiperbole. To je stožnica, ko poteka skozi oglišča trikotnika ABC ter skozi težišče G in višinsko točko H tega trikotnika.

10. Izpelji enačbo Steinerjeve očrtane elipse. To je trikotniku *ABC* očrtana elipsa s središčem v težišču *G* trikotnika *ABC*.

11. Določi presečišča kubične krivulje trikotnika s polom *F* z nosilkami stranic trikotnika *ABC* . Rezultat geometrijsko interpretiraj.

12. Točki B_1 in B_2 s trilinearnimi koordinatami $B_1 = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$ in $B_2 = \frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}$ imenujemo *prva in druga Brocardova točka trikotnika ABC*.
    a. Razpolovišče daljice B_1B_2 imenujemo *Brocardovo razpolovišče*. Dokaži, da so trilinearne koordinate Brocardovega razpolovišča $a\,(b^2+c^2) : b(c^2+a^2) : c(a^2+b^2)$.
    b. Premisli, da B_1 in B_2 nista značilni točki trikotnika, njuno razpolovišče pa je. (V Kimberlingovi ETC nosi oznako X(39)).
    c. Dokaži, da so točke X(3), X(6) in X(39) kolinearne.

13. Naj bo H_n množica homogenih polinomov stopnje *n*, S_n množica simetričnih homogenih polinomov stopnje *n* in T_n množica homogenih polinomov stopnje *n* z lastnostjo $p(a,b,c) = p(a,c,b)$. Koeficiente polinomov v vseh primerih jemljemo iz obsega realnih števil.

    Določi dimenzije vektorskih prostorov H_n, S_n, T_n (n = 1,2,3,4) nad obsegom realnih števil.