ELEMENTARNE FUNKCIJE
Vaje - 2. sklop: Funkcije

....

Naloge na vajah

1. Naj bo f funkcija, ki vsakemu človeku priredi njegov mesec rojstva. Za funkcijo f zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

2. Naj bo f funkcija, ki vsakemu državljanu priredi njegov EMŠO. Za funkcijo f zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^2$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

4. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

5. Naj bo $A = [1, 3]$ in $B = [2, 5]$. Poišči vsaj eno bijekcijo $f : A \to B$ in dokaži, da je res bijekcija.

6. Naj bo $A = (0, 1)$ in $B = \mathbb{R}$. Poišči vsaj tri različne bijekcije $f : A \to B$.

7. Določi podmnožici realnih števil A in B tako, da bo funkcija $f : A \to B$, podana s predpisom $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$, bijektivna. Zapiši tudi predpis inverzne funkcije f^{-1}.

8. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ je sod} \\ 3n + 1, & n \text{ je lih.} \end{cases}$$
Ali je funkcija f injektivna oziroma surjektivna?

9. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x; & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Ugotovi, ali je f injektivna oziroma surjektivna.

10. Podana je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ s predpisom $f(a) = \sqrt{(a-1)^2}$.
    (a) Skiciraj graf funkcije f.
    (b) Ugotovi, ali je funkcija f injektivna ali surjektivna.
    (c) Če f ni bijektivna, ustrezno spremeni domeno, da bo.

11. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 1$. Določi $f([0, \infty))$, $f^{-1}((1, 3])$ in $f^{-1}((-2, -1))$.

12. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Določi $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}])$.

13. Naj bo $A = (0, 1) \times \mathbb{Z}$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x, k) = x + k$.

(a) Določi $f(A)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$ in $f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$.
(b) Dokaži, da je f injektivna.

14. Naj bo $A = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funkcija}\}$. Podana je preslikava

$$\begin{aligned} F &: A \to \mathbb{R} \\ F &: f \mapsto f(0). \end{aligned}$$

   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.
   (b) Ali je funkcija F, zožena na množico $B = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + b, b \in \mathbb{R}\}$ injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

15. Naj bo $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ funkcija s predpisom $F(n, m) = n - m$.
   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna.
   (b) Določi množico $F^{-1}\big(\{-2, 2\}\big)$ in jo skiciraj v $\mathbb{R}^2$.

16. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma $f(x) = 2^x$ in $g(x) = x - 1$. Določi predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$. Ali sta ti dve funkciji bijektivni? Če sta, to tudi dokaži.

17. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

   Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ ter nariši grafe vseh štirih funkcij.

18. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ 3 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

   Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$.

19. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g injektivni, potem je $g \circ f$ injektivna.

20. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če je funkcija $g \circ f$ injektivna in f surjektivna, potem je g injektivna.

Domača naloga

1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

2. Naj bo f predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi njemu najbljžje praštevilo. Je tako podana preslikava f dobro definirana? V čem je težava takšne "definicije"?

3. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g surjektivni, potem je $g \circ f$ surjektivna.

4. Naj bosta $f : B \to C$ in $g : A \to B$ funkciji ter naj bo $f \circ g : A \to C$ njun kompozitum.

(a) Dokaži: če je funkcija $f \circ g$ surjektivna, potem je f surjektivna.
(b) Naj velja $A = B = C = \mathbb{R}$. Poišči taki funkciji f in g, da bo f surjektivna, $f \circ g$ pa ne.

5. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \log x$.
   (a) Določi $f^{-1}(\mathbb{Q})$ in $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
   (b) Ugotovi, ali je $f(3)$ racionalno ali iracionalno število.

6. Podana je preslikava
$$F : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$
$$F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$
   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.
   (b) Zapiši in skiciraj množici $F^{-1}(\{4\})$ ter $F^{-1}([1, 9])$.
   (c) Ali je funkcija F, zožena na množico $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \wedge y \geq 0\}$ injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

7. Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dane so množice $A = f\left([3, \infty)\right), \quad B = f^{-1}\left([-2, 4]\right)$ in $C = f\left(\left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.
   (a) Zapiši in skiciraj množici A in B v $\mathbb{R}$.
   (b) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic A, B in C. Odgovor za infimum množice C tudi dokaži.

8. Naj bo $f : [0, 1) \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f((x, y)) = x + y$.
   (a) Skiciraj množico $A = [0, 1) \times [0, 1)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ in množico $f(A)$ na realni osi.
   (b) Določi množici $f^{-1}\big([2, \infty)\big)$, in $f^{-1}\big(\{\frac{1}{2}\}\big)$ in ju skiciraj v $\mathbb{R}^2$.
   (c) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic $A = f\left((0, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}\right)$ in $B = f\left(\left\{\left(\frac{n}{n+1}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

9. Naj bo D množica vseh linearnih realnih funkcij oblike $f_{a,b}(x) = ax + b$, za katere je $b \neq 0$ in je $f(1) = 1$. Preslikava F priredi funkciji $f_{a,b} \in D$ ulomek $\frac{a}{b}$. Ali je F injektivna? Kaj je zaloga vrednosti funkcije F?

10. Funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imata predpisa
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 3x + 1, & -1 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}.$$
   (a) Skiciraj graf funkcije f in ugotovi, ali obstaja inverzna funkcija funkcije f. Če inverzna funkcija obstaja, zapiši njen funkcijski predpis. Vse odgovore utemelji!
   (b) Zapiši predpis funkcije $f \circ g$.

11. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < -2 \\ -x^2 + 5, & -2 \leq x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}.$$
Zapiši predpis funkcije $f \circ g$, nariši njen graf in določi zalogo vrednosti te funkcije.