ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 4. sklop: Stožnice

Naloge na vajah

1. Podani sta množici $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 4x + y^2 \leq 5\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 4x + y^2 = 5\}$.
   (a) Skiciraj A in B ter ugotovi, ali množica B predstavlja graf kake realne funkcije realne spremenljivke.
   (b) Določi množici X in Y tako, da bo del množice B predstavljal graf neke bijektivne funkcije $f : X \to Y$.
   (c) Poišči inverz funkcije f ter skiciraj grafa funkcij f in f^{-1}.
2. Pokaži, da enačba $x^2+ax+y^2+by+c = 0$ podaja krožnico le, če velja $a^2+b^2-4c > 0$.
3. Določi enačbo krožnice, očrtane trikotniku, ki ga določajo premice $x + y - 3 = 0$, $5x + 4y - 16 = 0$ in $3x + 2y - 8 = 0$.
4. Izpelji enačbo elipse v središčni legi.
5. Zapiši enačbo elipse v središčni legi in veliko osjo na abscisi, če merita razdalji enega gorišča od obeh krajišč velike osi 9 enot in 3 enote.
6. Izračunaj ploščino pravokotnika, katerega oglišča so presečišča elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ in kroga $x^2 + y^2 = 52$.
7. Elipsa $3x^2+5y^2 = 120$ in enakoosna hiperbola imata skupni gorišči. Določi enačbo hiperbole.
8. V enačbi $16x^2-9y^2-32x+36y+a = 0$ določi a tako, da enačba ne bo predstavljala hiperbole.
9. Na hiperboli z enačbo $x^2 - y^2 = 4$ in goriščema F_1 ter F_2 določi take točke T, da bo trikotnik F_1F_2T pravokoten s pravim kotom pri T.
10. Kolikšno daljico odreže parabola $y^2 = x$ od premice $y = x - 2$.
11. Določi enačbo parabole s temenom v koordinatnem izhodišču, če se njeno gorišče ujema z desnim goriščem elipse $x^2 + 5y^2 = 5$.
12. Napiši enačbo elipse, ki ima središče v temenu parabole $y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$. Eno gorišče se ujema z goriščem parabole in velja, da se elipsa dotika abscisne osi.

Domače naloge

1. Določi parameter m tako, da bo točka $T(-1, 5)$ ležala na krožnici $(x-2m)^2+(y-m)^2 = 25$.
2. Razišči medsebojno lego premice $x - 2y - 10 = 0$ in elipse $5x^2 + 2y^2 = 8$.
3. Dane so točke $A(2, 3)$, $B(5, 0)$ in $C(3, 2\sqrt{2})$. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica, ki poteka skozi točke A, B in C.
   a) Zapiši enačbo krožnice $\mathcal{K}$.
   b) Zapiši enačbo enakoosne hiperbole, ki ima gorišči v točkah B in $D(-1, 0)$.

4. Dani sta množici v $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = -\frac{x^2}{4} + x\} \text{ in } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x - 4y^2 = 0 \wedge y \geq 0\}.$$

   (a) Skiciraj množici v ravnini in zapiši množico $A \cap B$, tako da našteješ vse njene elemente.

   (b) Utemelji, ali katera izmed množic A oz. B predstavlja graf kake realne funkcije realne spremenljivke? Če je odgovor da, zapiši domeno in funkcijski predpis te funkcije.

5. Izpelji enačbo hiperbole v središčni legi.

6. Napiši enačbo hiperbole, ki ima asimptoti $y = x + 4$ in $y = -x - 2$, če se eno gorišče hiperbole ujema z goriščem parabole $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$.

7. Izpelji enačbo parabole v središčni legi.

8. V $\mathbb{R}^2$ sta podani množici $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 9\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2x^2 + 25y^2 \leq 25a^2\}$, kjer je $a \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Določi najmanjše možno število $a \in \mathbb{R}^+$ tako, da bo $A^C \subseteq B$. Nato za izbrani a skiciraj množico $A \setminus B$.

   (b) Če je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, skiciraj množico $A \cap D$.