UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Prvi test iz ELEMENTARNIH FUNKCIJ
9. 11. 2017

Navodila:

- Čas reševanja je **120 minut**.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon.
- Uporaba knjig in zapiskov iz predavanj ter vaj **ni dovoljena**.
- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor **skrbno utemelji**.
  Odgovori brez utemeljtve ne bodo točkovani.
- Piši čitljivo; neberljivi odgovori ne bodo točkovani.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, A4 list s formulami.

....

1. **[30]** Podana je preslikava
$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$F : (a, b) \mapsto ab.$$
   (a) Izračunaj ter zapiši množico $F(A)$, kjer je $A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, a = b + 1 \wedge a \leq 5\}$, in množico $F^{-1}(\{9, 10\})$.
   (b) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.
   (c) Funkcija $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ naj bo podana s predpisom $G(n) = (n+1, n^2)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Določi domeno in kodomeno kompozituma $F \circ G$ ter izračunaj predpis funkcije $F \circ G$.

2. **[15]** Za neprazni podmnožici A in B množice $\mathbb{R}$ definiramo $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.
   (a) Če je $A = (0, 3)$ in $B = [2, 7)$, določi množico $A + B$.
   (b) Naj bosta A in B poljubni neprazni podmnožici množice $\mathbb{R}$, ki sta omejeni. Dokaži, da je tudi množica $A + B$ omejena.

3. **[15]** Naj bosta p in q različni praštevili. Pokaži, da je število $\log_{\sqrt{p}} q$ iracionalno.

4. **[25]** Dana je elipsa E z enačbo $x^2 + 2y^2 = 18$.
   (a) Skiciraj elipso E ter zapiši vsa štiri temena in obe njeni gorišči. Zapiši še enačbo elipse E', ki jo dobimo tako, da elipso E vzporedno premaknemo za vektor $\overrightarrow{s} = (2, 3)$.
   (b) V elipso E je včrtan enakokraki trikotnik T, katerega dve oglišči ležita na premici z enačbo $y = -x + 3$. Izračunaj vsa tri oglišča trikotnika T.

5. **[15]** Množici A in B naj imata neprazen presek in naj bosta $f : A \to C$, $g : B \to D$ dve bijektivni funkciji, za kateri velja $f(x) = g(x)$, če je $x \in A \cap B$.
   (a) Dokaži, da $C \cap D \neq \emptyset$.
   (b) Ali je funkcija $h : A \cup B \to C \cup D$, definirana s predpisom
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & \text{sicer} \end{cases}$$
   nujno bijektivna? Utemelji!