

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(21.1.2002)

1. [25] Ploščina krožnega odseka, nad središčnim kotom θ radianov se izračuna po formuli:

$$P = \frac{r^2(\theta - \sin \theta)}{2}$$

pri čemer je r polmer kroga. S pomočjo sekantne metode izračunaj kot θ na tri decimalna mesta natančno, če vemo, da je ploščina odseka enaka $P = 1.2$, ko je polmer kroga $r = 5$.

2. [25] S pomočjo razcepa Choleskega izračunaj determinanto matrike A in reši (tudi glede na razcep Choleskega) sistem $A \cdot x = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. [25] Izpelji naslednjo Gaussovo kvadraturno formulo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + R$$

4. [25] Izpelji formulo za drugi odvod funkcije, oblike

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h) + Df(x+3h)] + R$$

in oceni napako R .

Čas reševanja 100 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(4.2.2002)

1. [25] Za spodnjo matriko A določi po absolutni vrednosti največjo in najmanjšo lastno vrednost na tri decimalna mesta natančno.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. [25] Z direktnim LU razcepom reši sistem $A \cdot x = b$, pri čemer je matrika A enaka kot v prvi nalogi in $b = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$.

3. [25] Izpelji formulo za izračun približne vrednosti odvoda funkcije f v točki x , ki bo čim višjega reda:

$$f'(x) \simeq \frac{Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)}{2h}.$$

Izračunaj napako in zapiši red dobljene metode.

4. [25] Izračunaj interpolacijski polinom, ki se na točkah 0, 1, 2 ujema z naslednjimi vrednostmi:

x	0	1	2
$p(x)$	1	1	3
$p'(x)$	1		5
$p''(x)$	2		14

Čas reševanja 90 min.

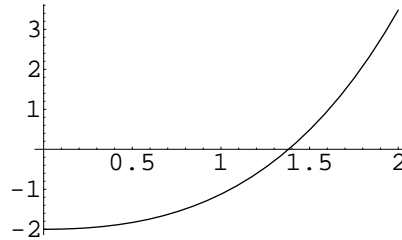
Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(10.6.2002)

1. [20] Z uporabo Newtonove metode poišči rešitev enačbe

$$e^x - \sin x - 3 = 0$$

na dve decimalki natančno brez uporabe analitičnega izraza za prvi odvod. Uporabi Richardsonovo ekstrapolacijo (za $M = 1$, $h = 0.01$) za približek vrednosti prvega odvoda v vsaki točki Newtonove metode.



Slika 1: Graf funkcije $e^x - \sin x - 3$

2. [20] Z direktnim LU razcepom reši sistem $A \cdot x = b$. S pomočjo dobljenega LU razcepa izračunaj determinanto matrike A in poišči A^{-1} . Tudi inverzno matriko moraš izračunati s pomočjo matrik L in U .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. [20] Poišči Newtonov polinom najmanjše stopnje, ki interpolira podatke:

x	2	4	6
$f(x)$	3	5	7
$f'(x)$	0		4
$f''(x)$	4		

4. [20] Izpelji Adams-Bashforthovo in Adams-Moultonovo metodo na treh točkah.
5. [20] S pomočjo eksplcitne metode v čim manj korakih izračunaj približno vrednost $u(\frac{1}{4}, \frac{1}{20})$, kjer je u rešitev parcialne diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t \\ u(x, 0) &= \sqrt{x} \quad ; \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) &= t(t-1) \\ u(1, t) &= 2^{-t} \end{aligned}$$

Čas reševanja 100 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(24.6.2002)

1. [20] Določi A_i in x_i , da bo formula

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

točna za vse polinome $p \in \Pi_5$.

2. [20] Ali je število

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{5}2^{-24}$$

predstavljivo številu na hipotetičnem računalniku MARC-32? Odgovor utemelji!

3. [20] Poišči naravni kubični zlepek, ki na intervalu $[0, 3]$ interpolira točke:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	1	5

4. [20] Proizvodno podjetje ima na razpolago tri vrste surovin: prve 21, druge 24 in tretje 16 enot. S temi surovinami izdelava dva tipa izdelkov. Pri proizvodnji ene enote prvega izdelka porabi 1 enoto prve, 2 enoti druge in 2 enoti tretje surovine; pri proizvodnji ene enote drugega izdelka pa porabi 3 enote prve, 3 enote druge in 1 enoto tretje surovine. Pri prodaji dobi podjetje od enote prvega izdelka 5, od prodaje drugega izdelka pa 4 denarne enote. Kako naj podjetje proizvede izdelke, da bo imelo pri prodaji največji prihodek?
5. [20] Z metodo Taylorjeve vrste reda 1 tabeliraj vrednosti funkcije $x(t), y(t)$ na intervalu $[0, 2]$ s korakom $h = 0.5$, pri čemer sta x in y rešitvi naslednjega sistema navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}x'' + xy &= 0 \\y' + 2xy &= 4 \\x(0) &= 1 \\x'(0) &= 0 \\y(0) &= 3\end{aligned}$$

Čas reševanja 100 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(26.8.2002)

1. [25] Za $x_i = i - 2$, $i = 0, \dots, 4$ in $f(x) = x^5$ izračunaj tabelo deljenih diferenc. S pomočjo te tabele določi Newtonov interpolacijski polinom, ki interpolira dane podatke. Poišči zgornjo mejo za $|f(x) - p(x)|$ na intervalu $[-2, 2]$.
2. [25] Imejmo naslednjo diferencialno enačbo:

$$x' = \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2,$$

kjer je $x(1) = 1$. Izračunaj *dva koraka* po metodi Runge-Kutta reda 2 za $h = 0.1$.

3. [25] S pomočjo simpleksnega algoritma reši naslednjo linearno nalogo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{pri čemer} \quad & 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ & x_1 + 8x_2 \leq 24, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pretvori problem še v prvo standardno obliko in zapiši njegovo dualno nalogo.

4. [25]

(a) Dokaži, da je naslednja formula (metoda) natančna za polinome Π_4 :

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{90} \left(7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1) \right).$$

(b) Zapiši to formulo na intervalu $[a, b]$.

(c) S pomočjo formul v (a) ali (b) izračunaj vrednost $\ln 2$.

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator.

Računajte na **vsaj 6** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 5 decimalnih mest. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(9. 9. 2002)

1. [25] Renta je fond denarja z letnim vplačevanjem. Renta se obrestuje na koncu leta s konstantno letno obrestno mero r . Naj a_0, a_1, a_2, \dots označujejo vložene vrednosti in V_i vrednost rente takoj po vplačilu vrednosti a_i .

Tedaj je $V_0 = a_0$ in $V_i = V_{i-1}(1+r) + a_i$; $i = 1, 2, \dots$

Naj v 36 mesečnem rentnem varčevanju vsako leto vplačamo naslednje vrednosti: 1, 2, 3 in 4 SIT. Po zadnjem vplačilu je znašala vrednost rente $V_3 = 11.051$ SIT. Izračunaj mesečno obrestno mero na štiri decimalna mesta natančno. Ničlo dobljenega polinoma izračunaj z Newtonovo metodo z začetnim približkom $r_0 = 0$.

2. [25] Poišči razcep Choleskega za spodnjo matriko A . Doloži približno vrednost za spektralni radij matrike, $\rho(A)$, tako da izvedeš dva koraka potenčne metode z začetnim vektorjem $x_0 = (-0.03, -0.72, 0.52, -0.46)^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.213 & -0.17 & 0.1 \\ 0.213 & 4.7869 & -3.521 & 2.88 \\ -0.17 & -3.521 & 3.93 & -0.4 \\ 0.1 & 2.88 & -0.4 & 4.26 \end{bmatrix}$$

3. [25] Z uporabo Taylorjeve vrste izpelji napako za formulo

$$f'''(x) = \frac{1}{2h^3}[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)].$$

4. [25] Izpelji Gausovo kvadraturno formulo na treh točkah za izračun približne vrednosti integrala

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2)$$

in jo uporabi na primeru

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{x^2} dx.$$

Dokaži ustrezen red metode.

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator.

Računajte na **vsaj 6** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 5 decimalnih mest. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!