

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(22.1.2003)

1. [25] Naj bo $f(x) = 3 \cdot 2^x$. Za vrednosti v tabeli izračunaj tabelo deljenih diferenc. S pomočjo te tabele določi Newtonov interpolacijski polinom, ki interpolira dane podatke. Zapiši Newtonove polinome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ in $p_4(x)$ ter izračunaj njihove vrednosti v točkah $x = 1.5$ in $x = 2.5$. Primerjaj z natančnimi vrednostmi.

x	1.0	2.0	0.0	3.0	-1.0
$f(x)$	6.0	12.0	3.0	24.0	1.5

2. [25] S pomočjo simpleksnega algoritma reši naslednjo nalogo:
Dva tipa vitaminov V_1 in V_2 lahko kupimo v dveh tipih tablet T_1 in T_2 . Tableta T_1 vsebuje 4 enote prvega in 3 enote drugega vitamina; tableta T_2 pa vsebuje 1 enoto prvega in 4 enote drugega vitamina. Prva tableta stane 17, druga pa 14 SIT. Z nakupom tablet moramo dobiti najmanj 7 enot prvega in najmanj 15 enot drugega vitamina. Koliko tablet vsakega tipa naj kupimo, da zadostimo zahtevam po vitaminih in da bodo stroški nakupa najmanjši?
3. [25] Izpelji formulo za izračun približne vrednosti drugega odvoda funkcije f v točki x , ki bo čim višjega reda:

$$f''(x) \approx \frac{Af(x-h) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)}{h^2}.$$

Izračunaj napako in zapiši red dobljene metode.

4. [25] Imejmo naslednjo diferencialno enačbo:

$$x' = \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2,$$

kjer je $x(1) = 1$. Izračunaj *dva koraka* po metodi Runge-Kutta reda 2 za $h = 0.1$.

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator.

Računajte na **vsaj 6** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 5 decimalnih mest. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(5.2.2003)

1. [20] S pomočjo navadne iteracije in Newtonove metode izračunaj pozitivno realno rešitev enačbe

$$23x^5 - 20x + 3 = 0$$

na dve decimalni mesti natančno. Postopka primerjaj.

2. [25] Za $n = 2$ in $[a, b] = [0, 1]$ obstajata odprta in zaprta Newton-Cotesova formula oblike:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf(1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha f\left(\frac{1}{4}\right) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Izračunajte koeficiente a, b, c, α, β in γ . Katera od obeh metod je boljša? Odgovor dokaži oz. utemelji!

3. [30] S pomočjo Taylorjeve vrste 2. reda izračunaj vrednosti x, x' in x'' v točkah 8.1 in 8.2:

$$x''' + 2x'' - x' - 2x = e^t,$$

kjer velja:

$$x(8) = 3, \quad x'(8) = 2, \quad x''(8) = 1.$$

4. [25] Izračunaj razcep Choleskega za spodnjo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

ter reši sistem

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator.

Računajte na vsaj 6 decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 5 decimalnih mest. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(19.6.2003)

- [25]
 - Ali je število $2^2 + 2^{-22}$ predstavljivo na hipotetičnem računalniku **MARC-32**?
Odgovor utemelji!
 - Dokaži, da če sta x in y predstavljeni števili na **MARC-32**, in če velja $|y| \leq |x|2^{-25}$, potem velja $fl(x + y) = x$.
- [25] Za $x_i = i - 2$, $i = 0, \dots, 4$ in $f(x) = x^5 + 3x$ izračunaj tabelo deljenih diferenc. Zapiši vse Newtonove interpolacijske polinome $p_0(x), \dots, p_n(x)$. Poišči zgornjo mejo za $|f(x) - p(x)|$ na intervalu $[-2, 2]$.
- [25] S pomočjo simpleksnega algoritma preveri, ali je dana ekstremna točka $x = \{8, 0, 0, 12, 0, 2\}$ optimalna rešitev naslednje linearne naloge:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \\ \text{pri čemer} \quad & -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = -4, \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 18, \\ & x_i \geq 0 \quad ; \quad \forall i. \end{aligned}$$

Pretvori problem še v prvo standardno obliko in zapiši njegovo dualno nalogo.

- [25] Imejmo naslednjo diferencialno enačbo:

$$x' = \frac{x}{2t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2,$$

kjer je $x(1) = 1$. Izračunaj *dva koraka* po metodi tipa Runge-Kutta reda 2 za $h = 0.1$.

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator brez možnosti simboličnega računanja.

Računajte na **vsaj 5** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 4 decimalna mesta. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(03. julij 2003)

1. [25] Ploščina poljubnega trikotnika, za katerega so znane dolžine stranic a , b in c se lahko izračuna po Heronovem obrazcu:

$$P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}; \text{ kjer je } s = \frac{a + b + c}{2}$$

Z začetnima približkoma $t_0 = 1.1$ in $t_1 = 1.2$ s pomočjo sekantne metode določi dolžine stranic trikotnika na tri decimalna mesta natančno, če vemo, da je ploščina $P = 1.3$ in da je razmerje med stranicami trikotnika enako $a : b : c = 1 : 2 : 2.5$.

2. [25] S pomočjo LU razcepa reši sistem $Ax = b$, izračunaj inverzno matriko A^{-1} matrike A ter s pomočjo razcepa izračunaj determinanto matrike A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 46 \\ 20 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. [25] Izpelj kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx \approx A_0 f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{3\pi}{4}\right),$$

ki bo točna na prostoru Π_3 .

4. [25] Izračunaj približno vrednost za $u(2, 1)$, kjer je u rešitev Dirichletove naloge:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ u(x, 0) &= x^2 + 1 && ; 0 \leq x \leq 3, \\ u(0, y) &= e^y && ; 0 \leq y \leq 2, \\ u(x, 2) &= u(3, y) = 0 && ; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, \end{aligned}$$

če interval $[0, 3]$ razdeliš na 3 in interval $[0, 2]$ na 2 ekvidistančna intervala.

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator brez možnosti simboličnega računanja.

Računajte na **vsaj 5** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 4 decimalna mesta. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!

Izpit iz
NUMERIČNE MATEMATIKE
(28. avgust 2003)

1. [25] S pomočjo Newtonove metode na intervalu $[1, 2]$ določi ničlo funkcije

$$f(x) = 0.1 + 0.6 \cos x$$

na štiri decimalna mesta natančno.

2. [25] Markovski proces lahko opišemo s kvadratno matriko, katere elementi so vsi pozitivni, njihove vsote po stolpcih pa so enake 1. Naj bo $P_0 = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^T$ zapis o številu ljudi v nekem mestu, ki uporabljajo blagovno znamko X, Y in Z , v tem vrstnem redu. Vsak mesec se ljudje odločajo, ali bodo uporabljali enako znamko, ali jo spremenili. Verjetnost, da uporabnik znamke X zamenja za znamko Y ali Z , je 0.3 za obe; verjetnost, da uporabnik znamke Y zamenja za znamko X ali Z , je 0.3 in 0.2 v tem vrstnem redu in verjetnost, da uporabnik znamke Z zamenja za znamko X ali Y , je 0.1 in 0.3 v tem vrstnem redu.

Matrika prehodov za ta proces je

$$P_{k+1} = AP_k = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix}$$

Upoštevajoč, da je $P_0 = (2000, 6000, 4000)^T$, poišči P_1 in P_2 . Pokaži, da je limita zaporedja $\{P_k\}$ enaka $(3000, 4500, 4500)^T$. Lastne vrednosti za matriko A so 1, 0.3 in 0.2.

3. [25] Poišči naravni kubični zlepek $S(x)$ za spodnjo tabelo:

x	-1	0	1	2
$S(x)$	-1	1	3	9

4. [25] Izpelji formulo za drugi odvod funkcije, oblike

$$f''(x) = \frac{Af(x-2h) + Bf(x) + Cf(x+2h)}{h^2} + R$$

in oceni napako R .

Na izpitu lahko imate izpisane formule s predavanj, pisalo in kalkulator brez možnosti simboličnega računanja.

Računajte na **vsaj 5** decimalnih mest natančno, končni rezultat zaokrožite na 4 decimalna mesta. Kjer je možno, pustite natančne rezultate.

Čas reševanja 90 min.

Veliko uspeha pri reševanju!