Vaje 8: Obravnava linearnih sistemov

Naloge na vajah:

1. Glede na realno število a poišči rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + z + u &= 2\,, \\ x + ay + z + 2u &= 3 - a\,, \\ -2x - (1+a)\,z - u &= -4 + a\,, \\ ay + 2u &= 2 - a\,. \end{aligned}$$

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 1 \\ -2 & 0 & -2a & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Glede na $a \in \mathbb{R}$ določi rang matrike A.

   (b) Glede na $a \in \mathbb{R}$ reši prirejeni homogeni linearni sistem $Ax = 0$. Poišči tudi kako bazo prostora rešitev!

3. Glede na realni števili a in b obravnavaj sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & a \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}.$$

4. S pomočjo Cramerjevega pravila obravnavaj in reši linearni sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}.$$

Samostojno reši: [1, Naloge: 412, 413(c), 418], [2, Naloge: 145, 147, 148] in [3, Naloge: 147, 148, 152].

Primeri izpitnih nalog:

1. Glede na realno število a poišči rešitve sistema linearnih enačb.

$$\begin{aligned} 2x - ay - z - u &= 0 \\ x - z - u &= 0 \\ \left(a^2 - a\right) z + (1-a)\,u &= a - 1 \\ -2x + ay + z + (a+1)\,u &= a^2 - a \end{aligned}$$

2. Glede na realna števila a, b in c obravnavaj rešljivost sistema.

$$\begin{aligned} x+(a+1)\,y+3z+(a+4)\,u &= b \\ 2x+2y-z+u &= 3 \\ x+y+u &= 1 \\ ay+2z+(a+2)\,u &= c \end{aligned}$$

   V primeru, ko je sistem rešljiv, rešitve tudi zapiši!

3. Ugotovi za katere vrednosti realnih parametrov je sistem:

$$\begin{aligned} x+y+2z-t &= 1 \\ 2x+3y+5z &= 0 \\ 3x+(a+3)\,y+6z+(a-3)\,t &= 1 \\ x+3y+4z+(a+1)\,t &= b \end{aligned}$$

   protisloven, enolično rešljiv in nedoločen. Rešitve tudi poišči!

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.