Vaje 10: Linearna preslikava

Naloge na vajah:

1. Naj bo preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{x}\,.$$
Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava. Določi jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in zalogo vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, če je $\overrightarrow{a} = (1, 0, 1)$.

2. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$
   (a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava
   (b) Določi podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost.

3. Ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja
$$\mathcal{A}(0,1,3,0) = (4,0,2)\,,\ \mathcal{A}(2,-1,3,1) = (1,-1,0)\,,\ \mathcal{A}(1,0,1,0) = (3,1,2)$$
in ki
   (a) je injektivna?
   (b) je surjektivna?
   (c) ima dvorazsežno jedro?

   V primeru pritrdilnega odgovora linearno preslikavo tudi določi!

4. Naj bo $\mathbb{R}[X]$ vektorski prostor realnih polinomov in $\mathbb{R}_n[X]$ podprostor polinomov stopnje $\leq n$.
   (a) Dokaži, da je odvajanje $\mathcal{D}(p) = p'$ linearna preslikava na $\mathbb{R}[X]$ oz. $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Na obeh vektorskih prostorih določi $\operatorname{Im}\mathcal{D}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$. Ali je linearna preslikava $\mathcal{D}$ injektivna oz. surjektivna?

5. Naj bo $A : V \to W$ linearna preslikava in naj za $w \in W$, $v_0 \in V$ velja $Av_0 = w$. Dokaži, da se da vsaka rešitev $x \in V$ enačbe $Ax = w$ zapisati v obliki $x = v_0 + v$ za neki $v \in \operatorname{Ker} A$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 263, 266, 302], [2, Naloge: 91, 106, 114] in [3, Naloge: 173, 83, 77].

Primera izpitnih nalog:

1. Za realno število a tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX - XA$. Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava. Poišči matriko, ki preslikavi $\mathcal{T}$ pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}^*$. Določi tudi razsežnost jedra preslikave $\mathcal{T}$ v odvisnosti od prametra a.

2. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}(X) = a\left(X + X^T\right)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ neničelna konstanta.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

   (c) Določi konstanto a tako, da bo $\mathcal{A}$ projektor**.

Opomba:
* - glej vaje Linearna preslikava in matrika,
** - glej vaje Prostor linearnih preslikav.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.