# Vaje 13: Lastna vrednost, lastni vektor

## Naloge na vajah:

1. (a) Dokaži, da je $\lambda \in \mathbb{F}$ lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko endomorfizem $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ ni injektiven.

   (b) Naj bo $V$ končno razsežen vektorski prostor. Dokaži, da je $\lambda \in \mathbb{F}$ lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$, kjer je $A$ pripadajoča matrika operatorja $\mathcal{A}$ v neki bazi prostora $V$.

2. Naj bo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vektorski prostor neskončno krat zvezno odvedljivih funkcij in $\mathcal{D} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ odvajanje. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje endomorfizma $\mathcal{D}$.

3. Poišči lastne vrednosti linearne preslikave $\mathcal{A} : V \to V$, ki zadošča:

   (a) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$,

   (b) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$.

4. Naj bo $\mathbb{R}(X)$ vektorski prostor realnih potenčnih vrst in $\mathcal{P}$ endomorfizem, definiran s predpisom:

$$\mathcal{P}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots .$$

   Poišči njegove lastne vrednosti in določi lastne podprostore.

5. Naj bo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorski prostor realnih zaporedij in $\mathcal{A}$ endomorfizem, definiran s predpisom:

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) = (a_2, a_1, a_4, a_3, \cdots, a_{2n}, a_{2n-1}, \cdots) .$$

   Poišči njegove lastne vrednosti in lastne podprostore.

6. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje čez ravnino $x + y + z = 0$.

   (a) Poišči lastne vrednosti in določi lastne podprostore zrcaljenja $\mathcal{A}$.

   (b) Zapiši bazo prostora $\mathbb{R}^3$ v kateri zrcaljenju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika.

7. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$ realnih polinomov stopnje največ $n \in \mathbb{N}$ je s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x + 1)\, p'(x)$$

   definiran endomorfizem $\mathcal{A}$.

   (a) Poišči lastne vrednosti in določi lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{A}$.

   (b) Ali se da endomorfizem $\mathcal{A}$ predstaviti v kaki bazi z diagonalno matriko?

**Samostojno reši:** [1, Naloge: 485, 493, 511], [2, Naloge: 262, 268, 279] in [3, Naloge: 245, 248, 249].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki prezrcali vsako točko v $\mathbb{R}^3$ prek premice $x = y = z$.

   (a) Kakšne so lastne vrednosti in lastni podprostori preslikave $\mathcal{A}$? Določi jih!

   (b) Poišči diagonalno matriko $A$, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v primerni bazi. Napiši to bazo!

   (c) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi?

2. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = (1 - x)\, p'(x)$$

   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator.

   (b) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ pripada operatorju $\mathcal{A}$.

   (c) Določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?

   (d) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje operatorja $\mathcal{A}$. Ali obstaja baza, v kateri operatorju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Če obstaja, zapiši to bazo in pripadajočo diagonalno matriko.

3. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{a},$$

   kjer je $\overrightarrow{a}$ dani enotski vektor. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore ter geometrijski učinek endomorfizma $\mathcal{P}$.

# Literatura


[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.