Vaje 17: Dualni prostor in Rieszov izrek

Naloge na vajah:

1. Naj bo V vektorski prostor in $f : V \to \mathbb{F}$ neničelni linearni funkcional. Dokaži, da obstaja tak vektor $v \in V$, da je $V = \operatorname{Ker} f \oplus \mathcal{L}\{v\}$. Opomba: To pomeni, da je jedro linearnega funkcionala hiperravnina, podprostor katerega kodimenzija je enaka 1.

2. Naj bosta $f, g \in V^*$ neničelna linearna funkcionala. Dokaži, da imata f in g enaki jedri natanko tedaj, ko je $f = \lambda g$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$.

3. Naj bo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ standardna baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[X]$. Poišči njeno dualno bazo $\mathcal{B}^*$ vektorskega prostora $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$ definiramo naslednje funkcionale:

$$F(p) = p(1) \ , \quad G(p) = p''(0) \ , \quad H(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \, .$$

   (a) Zapiši matrike, ki jim pripadajo glede na standardno bazo.
   (b) Določi njihova jedra.
   (c) Zapiši funkcionale F, G in H kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze.

5. Naj bo $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1)\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Poišči njeno dualno bazo v $(\mathbb{R}^3)^*$.

6. V naslednjih primerih poišči tak vektor $v_0 \in V$, da je $f(v) = \langle v | v_0 \rangle$, kjer je $f \in V^*$. Vektor v_0 imenujemo Rieszov vektor.

   (a) Naj bo $V = \mathbb{R}^n$ vektorski prostor z običajnim slalarnim produktom in

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \, ,$$

   kjer so $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

   (b) Naj bo $V = \mathbb{R}_2[X]$ vektorski prostor s skalarnim produktom

$$\langle p | q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)\,q(x)\,dx$$

   in $f(p) = p(1) + p'(1)$.

   (c) Naj bo $V = M_2(\mathbb{R})$ vektorski prostor s skalarnim produktom

$$\langle A | B \rangle = \operatorname{sled}\left(A^T B\right)$$

   in $f(A) = 2a_{11} - a_{12} + a_{21} + 2a_{22}$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 462, 466, 661], [2, Naloge: 335, 337, 343] in [3, Naloge: 159, 338, 342].

Primeri izpitnih nalog:

1. Na prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ realnih polinomov stopnje največ dva za $i = 1, 2, 3$ definiramo linearne funkcionale
$$F_i(p) = \int_0^i p(x)\, dx\,.$$
   (a) Dokaži, da je $\{F_1, F_2, F_3\}$ baza vektorskega prostora $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu F_1 glede na skalarni produkt
$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

2. Na realnem funkcijskem prostoru $V = \{a + b\sin x + c\cos x | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ definiramo linearni funkcional $F : V \to \mathbb{R}$ s predpisom $F(f) = f(0)$ za vse $f \in V$.
   (a) Določi jedro linearnega funkcionala F. Koliko je njegova dimenzija?
   (b) Na V je definiran skalarni produkt
$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
   za vse $f, g \in V$. Poišči tak $h \in V$, da bo $F(f) = \langle f|h\rangle$ za vse $f \in V$.

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^1 p(x)\, q(x)\, dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(2)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Določi jedro funkcionala F. Koliko je dimenzija jedra?
   (b) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.