Vaje 18: Adjungirani operatorji I

Naloge na vajah:

1. Naj bo bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathcal{A} : V \to V$ linearni operator. Adjungiran operator $\mathcal{A}^* : V \to V$ operatorja $\mathcal{A}$, je definiran s predpisom $\langle \mathcal{A}u | v \rangle = \langle u | \mathcal{A}^* v \rangle$ za vse $u, v \in V$.

   (a) Naj bo V realni vektorski prostor in operatorju $\mathcal{A}$ v ortonormirani bazi pripada matrika A. Kakšna matrika pripada operatorju $\mathcal{A}^*$?

   (b) Naj bo V kompleksni vektorski prostor in operatorju $\mathcal{A}$ v ortonormirani bazi pripada matrika A. Kakšna matrika pripada operatorju $\mathcal{A}^*$?

2. Naj endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslika vektorje $(0,0,2)$, $(0,1,1)$ in $(2,2,0)$ po vrsti v vektorje $(2,4,2)$, $(3,1,2)$ in $(12,-6,6)$. V standardni bazi poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^*$.

3. Naj operatorju $\mathcal{A}$ v bazi $\{(1,0), (1,i)\}$ prostora $\mathbb{C}^2$ z običajnim skalarnim produktom pripada matrika
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Kakšna matrika pripada operatorju $\mathcal{A}^*$ v tej bazi?

4. Dokaži, da je jedro operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ enako jedru operatorja $\mathcal{A}$.

5. Dokaži, da je jedro operatorja $\mathcal{A}^*$ ortogonalni komplement zaloge vrednosti operatorja $\mathcal{A}$, t.p. $\ker \mathcal{A}^* = (\operatorname{im} \mathcal{A})^\perp$. Od tod izpelji tudi $\operatorname{im} \mathcal{A}^* = (\ker \mathcal{A})^\perp$.

6. Naj bo $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravnino $\pi : z = 0$ vzdolž premice $p : x = y = z$. Ugotovi kako deluje adjungirana preslikava $\mathcal{P}^*$, če vzameš v $\mathbb{R}^3$ običajni skalarni produkt.

7. Naj bo $V = C^\infty[0,1]$ vektorski prostor neskončnokrat zvezno odvedljivih realnih funkcij s skalarnim produktom
$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\,.$$
   Naj bo linearni operator $\mathcal{A} : V \to V$ definiran s predpisom $(\mathcal{A}f)(x) = (x^2 - x)\, f'(x)$. Poišči predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 687, 692, 712], [2, Naloge: 349, 350, 355] in [3, Naloge: 343, 344, 345].

Primeri izpitnih nalog:

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava $\mathcal{A}$ projecira na premico $p : x = y = z$ vzdolž ravnine $\pi : x + y = 0$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$.

2. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{a},$$

kjer je $\overrightarrow{a}$ dani enotski vektor.

   (a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore ter geometrijski učinek endomorfizma $\mathcal{P}$.

   (b) Glede na običajni skalarni produkt določi pravilo za adjungirano preslikavo $\mathcal{P}^*$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava $\mathcal{A}$ zrcali pravokotno čez premico $p : x = y = z$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$. Kaj ugotoviš?

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.