Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 27. 1. 2003

1. (20) Dani sta ravnini $\pi : x - z = 1$ in $\Sigma : x - 2y + z = 1$.
   (a) Zapiši enačbo premice p, ki je presek ravnin π in Σ.
   (b) Določi enačbo ravnin, ki sta pravokotni na premico p in se dotikata sfere s središčem $S\,(1,1,1)$ in polmerom $r = \sqrt{3}$.

2. (25) Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R})\,;\, AXB^T = C\right\}$$
vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (30) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$
definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
   (c) Določi Jordanovo kanonično formo $J_{\mathcal{A}}$ operatorja $\mathcal{A}$ in zapiši bazo v kateri pripada operatorju $\mathcal{A}$ matrika $J_{\mathcal{A}}$.

4. (25) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(3)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 2. 2003

1. Težiščnica tristrane piramide je daljica, ki spaja oglišča piramide s težiščem nasprotne ploskve.
   (a) Dokaži, da se vse štiri težiščnice poljubne tristranične piramide sekajo v eni točki. V kakšnem razmerju ta točka deli težiščnico?
   (b) Dokaži, da če sta v tristrani piramidi dva para mimobežnih robov pravokotna, potem sta tudi ostala dva mimobežna robova med seboj pravokotna.
2. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R})\,; AXB^T = C\right\}$$
vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$
definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
   (c) Določi Jordanovo kanonično formo $J_{\mathcal{A}}$ operatorja $\mathcal{A}$ in zapiši bazo v kateri pripada operatorju $\mathcal{A}$ matrika $J_{\mathcal{A}}$.
4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(3)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 30 + 25$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 9. 6. 2003

1. Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kdaj je rešljiva vektorska enačba
$$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a}) \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{a}$$
in jo reši.

2. (a) Naj bosta $\mathcal{A} : U \to V$ in $\mathcal{B} : V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za preslikavo $\mathcal{BA} : U \to W$ velja relacija
$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{BA} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim (\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}) .$$
   (b) Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3 [X] \to M_2 (\mathbb{R})$ in $\mathcal{B} : M_2 (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisom:
$$\mathcal{A} (p) = \begin{bmatrix} p (0) & p'' (0) \\ p'' (0) & p' (0) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} (A) = \operatorname{Sled} (A) .$$
   Določi razsežnost in baze podprostorov $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}$ in $\operatorname{Ker} \mathcal{BA}$.

3. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{P} (\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a}) \overrightarrow{a},$$
kjer je $\overrightarrow{a}$ dani enotski vektor.
   (a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore ter geometrijski učinek endomorfizma $\mathcal{P}$.
   (b) Glede na običajni skalarni produkt določi pravilo za adjungirano preslikavo $\mathcal{P}^*$.

4. Endomorfizmu $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$ v standardni bazi pripada matrika A. Določi vse možne Jordanove forme J_A matrike A, če velja
$$\det A = 1,\ \dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} - \mathcal{I})^2 = 5,\ \dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} + \mathcal{I})^3 = 5.$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 23. 6. 2003

1. Naj bodo A, B, C in D točke v prostoru.

   (a) Izračunaj vrednost izraza $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

   (b) Dokaži, da je D težišče trikotnika ABC natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

2. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Naj bo U množica vseh matrik, ki komutirajo z matrikama A in B ter V množica tistih matrik, ki komutirajo vsaj z eno od A in B.

   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši njegovo bazo.

   (b) Dokaži, da je V ni vektorski podprostor. Določi najmanjši vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$, ki vsebuje V. Zapiši tudi njegovo bazo!

3. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   ortogonalno podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako matriko P, da bo $D = P^T AP$.

4. V vektorski prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je vpeljan tak skalarni produkt, da je $\{1 - x, 1 + 2x, x^2\}$ ortonormirana baza tega prostora. Naj bo $U = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, p(1) = 0\}$. Poišči ortonormirani bazi podprostorov U in $U^\perp$ ter izračunaj pravokotno projekcijo polinoma $1 + x + x^2$ na podprostor U.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2003

1. (a) Točke $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ in $C(x_3, y_3, z_3)$ določajo v $\mathbb{R}^3$ neizrojen trikotnik ΔABC. Zapiši enačbo nosilke višine na stranico c.

   (b) Dokaži, da se spojnice razpolovišč po dveh mimobežnih robov tristrane piramide sekajo v eni točki, ki te spojnice razpolavlja.

2. Ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

   $$\mathcal{A}(0,1,3,0) = (4,0,2)\,,\ \mathcal{A}(2,-1,3,1) = (1,-1,0)\,,\ \mathcal{A}(1,0,1,0) = (3,1,2)$$

   in ki

   (a) je injektivna?

   (b) je surjektivna?

   (c) ima dvorazsežno jedro?

   V primeru pritrdilnega odgovora linearno preslikavo tudi določi!

3. Dana je matrika $A \in M_6(\mathbb{R})$

   $$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0\,.$$

   Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(-1) + p(1)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.

   (a) Določi jedro funkcionala F, njegovo dimenzijo ter funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 9. 2003

1. Dan je paralelogram $ABCD$. Na daljici AB leži točka B' in na daljici AD leži točka D'. Skozi točko B' potegnemo vzporednico z AD in skozi D' potegnemo vzorednico z AB, le-ti se sekata v točki C'. Dokaži, da se nosilke daljic $B'D$, BD' in CC' sekajo v eni točki.

2. Reši matrično enačbo
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -4 & -16 & -16 \\ 11 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo A realna matrika, ki se da diagonalizirati in $p \in \mathbb{R}[X]$ poljuben polinom. Dokaži, da je mogoče diagonalizirati tudi matriko $p(A)$.

4. Poišči matriko zrcaljenja čez podprostor
$$V = \{(x, y, z, w) \,|4x - y - z = 0, y - z + 4w = 0\}$$
v standardni bazi evklidskega prostora $\mathbb{R}^4$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 19. 9. 2003

1. Med vsemi točkami, ki so enako oddaljene od premic

$$p : x - 1 = 2 - 2y, z = 3 \quad \text{in} \quad q : x = y = z$$

poišči tisto, ki je najbližje točki $T(1, 2, 1)$.

2. Naj bo t dano realno število in

$$U = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A^T = -tA \right\}.$$

Dokaži, da je U vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$ in glede na parameter t zapiši bazo podprostora U.

3. Naj bo V vektoski prostor z $\dim V = 3$ in $\mathcal{A} : V \to V$ endomorfizem, za katerega velja $\mathcal{A}^2 = 0$. Dokaži, da velja:

   (a) Endomorfizem $\mathcal{A}$ ni obrnljiv.
   (b) $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.
   (c) $\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0$.
   (d) $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$.

4. Dana je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

Naloge so enakovredne.