Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 4. 2. 2004

1. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko $E_{12} - E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.
   (b) Preveri, da je podprostor V zaprt za matrično množenje in velja $AB = BA$ za vse $A, B \in V$.
   (c) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

   Za matrično seštevanje in množenje je V torej komutativen obseg. Ali veš, kateremu komutativnemu obsegu je izomorfen?

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Naj bo U množica vseh tistih matrik $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, za katere velja $AX = I$. Določi množico U in preveri, ali velja katera od naslednjih trditev:
   (a) U je vektorski podprostor v $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$,
   (b) $U = X_0 + V$, kjer je V podprostor v $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ in X_0 fiksna matrika.

   Če velja katera od trditev, poišči eno od baz za nastopajoči podprostor. Ugotovi, če je med rešitvami tudi matrika $A^T \left(AA^T\right)^{-1}$.

3. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom
$$\mathcal{A}(x, y, z) = -\frac{1}{7}(3x + 2y - 6z, 2x + 6y + 3z, -6x + 3y - 2z).$$
   Pokaži, da je $\mathcal{A}$ zrcaljenje prostora $\mathbb{R}^3$ preko neke premice. Določi enačbo te premice v kanonski obliki!

4. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\mathcal{B} = \{(3i, 4), (7i, 1)\}$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2i & 1 \end{bmatrix}.$$
   Določi matriko transformacije $\mathcal{A}^*$ glede na bazo $\mathcal{B}$, če vzamemo v $\mathbb{C}^2$ običajni skalarni produkt.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 18. 2. 2004

1. Dana je tristrana piramida $ABCD$. Naj bo točka T težišče trikotnika BCD. Točka E naj bo razpolovišče daljice AB, točka F razpolovišče daljice AC, Točka G pa deli daljico AD v razmerju $AG : GD = 1 : 4$. Daljica AT prebode trikotnik EFG v točki S. Določi razmerje $AS : ST$.

2. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:
$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 0 & b & \cdots & b & b \\ a & b & 0 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & b & \cdots & 0 & b \\ a & b & b & \cdots & b & 0 \end{vmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Za realni števili a in b tvorimo matriko
$$A = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$
Linearna reslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$. Glede na vrednosti parametrov a in b obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave $\mathcal{T}$. Za vsak primer posebej določi tudi bazo jedra!

4. Naj bo linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podan s predpisom
$$\mathcal{A}(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, -x - z, 2x + 2y + 3z).$$
Preveri, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$ projektorja. Za vsakega od njiju določi podprostor in kot vzdolž katerega slika na svojo zalogo vrednosti. V $\mathbb{R}^3$ vzamemo običajni skalarni produkt.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 6. 2004

1. Naj bosta $p : 2x = -3y = 6z$ in $q : x = y = z$ premici v prostoru $\mathbb{R}^3$. Označimo z Σ ravnino, ki vsebuje premici p in q. Naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje čez premico q in $\mathcal{B}$ zrcaljenje čez ravnino Σ.

   (a) Za katere točke $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ velja $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{B}\vec{x}$? Kaj geometrijsko predstavlja ta množica? Zapiši njeno enačbo!

   (b) Zapiši matriko A, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada zrcaljenju $\mathcal{A}$.

   Naloga naj bo opremljena s skico!

2. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko $3E_{12} - 2E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$.

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.

   (b) Preveri, da je podprostor V zaprt za matrično množenje in velja $AB = BA$ za vse $A, B \in V$.

   (c) Dokaži, da za vsak neničelni $A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

3. V $\mathbb{R}_3[X]$ uvedemo skalarni produkt tako, da je množica $\{1, 1-x, 1-x^2, 1-x^3\}$ ortonormirana baza. Naj bo $V = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}$. Poišči ortonormirani bazi podprostorov V in $V^\perp$ ter izračunaj pravokotno projekcijo polinoma $1 + x^2 + x^3$ na podprostor V.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem vektorskega prostora V. Dokaži, da endomorfizem $\mathcal{A}$ zadošča $\operatorname{im} \mathcal{A}^2 = \operatorname{im} \mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $V = \ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A}$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2004

1. Naj bo S sfera določena z enačbo $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ in p premica, ki je presek ravnin $x + z = 2$ in $5x - 2z = 3$.

   (a) Zapiši enačbo premice p in določi medsebojni odnos premice p in sfere S?

   (b) Poišči enačbe vseh ravnin, ki potekajo skozi izhodišče, se dotikajo sfere S in so vzporedne premici p.

   Nalogo opremi s pregledno skico!

2. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, AXA^T = X\}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, BXB^T = X\}$, kjer je
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)\,1 + (2x_1 + x_2 - x_4)x + (4x_1 + 2x_2 - 2x_4)\,x^2.$$
   Poišči taki urejeni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}_2[X]$, v katerih bo linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripadala matrika
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo V realni vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot | \cdot \rangle$ in $u \in V$ neničelni vektor. Preslikava $\mathcal{A} : V \to V$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}x = x - \langle u | x \rangle \, u$.

   (a) Pokaži, da je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran operator.

   (b) Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore operatorja $\mathcal{A}$.

   (c) Kateri lastnosti mora zadoščati vektor u, da bo $\mathcal{A}$ projektor?

   (d) Kateri lastnosti mora zadoščati vektor u, da bo $\mathcal{A}$ pozitiven operator?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2004

1. V ostrokotnem trikotniku ABC se višini CD in BE sekata v točki V. Točke M, N, O in P so zaporedoma razpolovišča daljic BV, CV, AC in AB. Označimo vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.
   (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AV}$ samo z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$. Uporabi pravokotne projekcije!
   (b) Dokaži, da je lik $MNOP$ pravokotnik.

2. V algebri $M_n(\mathbb{R})$ je dana matrična enačba $(X - I)A = I + X$, kjer je A fiksna matrika in I identična matrika.
   (a) Ali je zgornja enačba rešljiva, če je $\det(I - A) = 2004$? Če je, koliko rešitev ima?
   (b) Reši dano matrično enačbo za primer $n = 3$ in
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. S predpisoma $\mathcal{F}p = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$ in $\mathcal{G}p = p'(-1)$ sta definirana linearna funkcionala na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Funkcionala $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze prostora $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Za primer $n = 3$ določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $\ker\mathcal{F}$, $\ker\mathcal{G}$, $\ker\mathcal{F} \cap \ker\mathcal{G}$ in $\ker\mathcal{F} + \ker\mathcal{G}$.

4. Sebi adjungiran linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima lastne vrednosti $1, -1$ in 0. Njegovo jedro je premica $x = y = -z$ in velja $\mathcal{A}(-1, 1, 0) = (1, -1, 0)$. Določi pripadajoče lastne vektorje operatorja $\mathcal{A}$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ poišči predpis za operator $\mathcal{A}^n$. V $\mathbb{R}^3$ vzamemo običajni skalarni produkt.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 9. 2004

1. Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C', D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C, D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

2. (a) Naj bosta $\mathcal{A} : U \to V$ in $\mathcal{B} : V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za preslikavo $\mathcal{BA} : U \to W$ velja relacija
$$\dim\ker\mathcal{BA} = \dim\ker\mathcal{A} + \dim\left(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}\right).$$
   (b) Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{B} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisom:
$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(-1) & p(-1) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(A) = \operatorname{sled}(A).$$
   Določi razsežnost in baze podprostorov $\ker\mathcal{A}$, $\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}$ in $\ker\mathcal{BA}$.

3. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A. Na osnovi tega zapiši tudi Jordanovo kanonično obliko in minimalni polinom matrike A.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ zasuk prostora $\mathbb{R}^3$ okoli premice $p : x = y = -z$ za kot $\pi/6$ v pozitivni smeri. Določi matriko A, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada preslikavi $\mathcal{A}$.

Točke so razporejene po nalogah: $20 + 30 + 25 + 25$.