Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 1. 2005

1. Dani sta ravnini $\pi : 2x + 2y + z = 3$ in $\Sigma : x + 2y + 2z = 6$. Določi enačbe premic, ki so od ravnin π in Σ enako oddaljene, in sicer 3 enote. Koliko je vseh rešitev?

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
in množici
$$\begin{aligned} U &= \left\{ X \in M_3(\mathbb{R}) \mid (A+X)^2 = A^2 + 2AX + X^2 \right\}, \\ V &= \left\{ X \in M_3(\mathbb{R}) \mid (A-X)^2 = A^2 + X^2 \right\}. \end{aligned}$$
Preveri, da sta U in V vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$. Določi tudi razsežnosti in primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

3. Izračunaj determinanto naslednje tridiagonalne matrike velikosti $n \times n$, kjer so na neoznačenih mestih ničle:
$$\begin{bmatrix} 2ab & a^2 & & & & \\ b^2 & 2ab & a^2 & & & \\ & b^2 & 2ab & a^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b^2 & 2ab & a^2 \\ & & & & b^2 & 2ab \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

4. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima lastno vrednost 0, kjer je pripadajoči lastni prostor ravnina $x + y - z = 0$, druga lastna vrednost je 1. Poišči matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Opiši tudi geometrijsko delovanje preslikave $\mathcal{A}$!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 7. 2. 2005

1. Dani sta ravnini $\pi : 5x + z = 16$ in $\Sigma : 2x - y = 5$, katerih presek je premica p. Katera točka na sferi $\mathcal{S} : x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 4 = 0$ je najbližja premici p. Prepričaj se, da premica p ne seka sfere $\mathcal{S}$!

2. Naj za endomorfizem $\mathcal{A} : V \to V$ velja $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}$. Preveri, da so

$$U = \{v \in V | \mathcal{A}v = 0\}\,,\ Z = \{v \in V | \mathcal{A}v = v\}\,,\ W = \{v \in V | \mathcal{A}v = -v\}\,.$$

   vektorski podprostori v V in dokaži, da se vsak $v \in V$ enolično zapiše kot vsota $v = u + z + w$, kjer je $u \in U, z \in Z, w \in W$.

3. Naj bo $T_2(\mathbb{R})$ vektorski prostor 2×2 realnih zgornje trikotnih matrik in $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ standardna baza tega prostora. Naj bo $\mathcal{A} : T_2(\mathbb{R}) \to T_2(\mathbb{R})$ linearna preslikava, ki po vrsti preslika matrike $E_{12}-E_{22}$, $E_{11}+2E_{12}$, $E_{11}+E_{12}$ v matrike $2E_{11}+2E_{12}+2E_{22}$, $3E_{12}$, E_{11}.

   (a) Zapiši matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $T_2(\mathbb{R})$.
   (b) Ali obstaja baza prostora $T_2(\mathbb{R})$, v kateri preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

4. Naj bosta $(x_1, x_2, x_3)\,, (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ in

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \,|\, (y_1, y_2, y_3) \rangle = ax_1y_1 - x_1y_2 + bx_2y_1 + 3x_2y_2 + cx_3y_3,$$

   kjer so a, b in c realne konstante. Kateremu pogoju morajo zadoščati konstante a, b in c, da bo $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 6. 2005

1. Premica p je presek ravnin
$$\pi : x - y + z = 1 \quad \text{in} \quad \Sigma : x + 2y + z = 4.$$
Zapiši enačbo ravnine Π, ki vsebuje premico p in oklepa z ravnino π kot $60°$. Kakšen kot oklepa ravnina Π z ravnino Σ? Koliko je vseh rešitev?

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
in množici
$$U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\} \quad \text{in} \quad V = \left\{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^T X = XA^T\right\}.$$
Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$. Poišči najmanjši podprostor prostora $M_3(\mathbb{R})$, ki vsebuje podprostora U in V, in največji podprostor v $M_3(\mathbb{R})$, ki je vsebovan v obeh podprostorih U in V. Zapiši njuni bazi!

3. Dana sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{b} + 2(\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{a} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (c) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje endomorfizma $\mathcal{A}$, če veš, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ortogonalna.

4. Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s takim skalarnim produktom $\langle . | . \rangle$, da je množica $\{1-x, 1+2x, x^2\}$ ortonormirana. O linearnem funkcionalu $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ vemo
$$f\left(2 + x + x^2\right) = 2, \quad f\left(1 + 2x + x^2\right) = 4 \quad \text{in} \quad f\left(1 + x + 2x^2\right) = 6.$$
   (a) Določi predpis za linearni funkcional f.
   (b) Kateri polinom $q \in \mathbb{R}_2[X]$ ustreza funkcionalu f po Rieszovem izreku?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2005

1. Dana je vektorska enačba
$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} - \vec{a} = (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b},$$
kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kateremu pogoju morata zadoščati vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da bo dana vektorska enačba rešljiva. V tem primeru rešitev tudi poišči!

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$
   (a) Določi podprostora $\operatorname{im} \mathcal{A}$ in $\ker \mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost!
   (b) Reši enačbo $\mathcal{A}p = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$.

3. Določi vse $a \in \mathbb{C}$, pri katerih matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a & -a-2 \end{bmatrix}$$
ne bo diagonalizabilna. Za dobljene $a \in \mathbb{C}$ poišči minimalni polinom matrike A in njeno jordansko matriko J_A.

4. Bilinearna preslikava $h : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom
$$h(p, q) = p(-1)\, q(-1) + p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1).$$
   (a) Zapiši matriko ki pripada preslikavi h v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Dokaži, da je h skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Poišči kako ortonormirano bazo podprostora
$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}$$
   in jo dopolni do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2005

1. Ravnina π poteka skozi koordinatno izhodišče in vsebuje točki $A\,(2,2,4)$ in $B\,(4,0,2)$. Označimo s Σ množico točk, ki so enako oddaljene od točk A in B.

   (a) Kaj geometrijsko predstavlja množica $\pi \cap \Sigma$? Zapiši njeno enačbo!

   (b) Določi točko C, ki je zrcalna slika točke A glede na množico $\pi \cap \Sigma$ v smeri vektorja $\vec{q} = (2,0,1)$.

   Nalogo opremi s pregledno skico!

2. Naj bo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ...) | a_n \in \mathbb{R}\}$ vektorski prostor vseh realnih zaporedij. Označimo z $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podmnožico vseh tistih zaporedij (a_n), ki zadoščajo relaciji $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   (b) Določi razsežnost podprostora V in poišči primer njegove baze.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom $\mathcal{A}\,(X) = BX - XC$, kjer je

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zapiši matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$ in določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.

   (b) Poišči Jordanovo kanonično formo matrike A.

4. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana preslikava, ki ima eno lastno vrednost 2. Za vsak vektor v, ki leži v ravnini $x - 2y - z = 0$, velja $\mathcal{A}v = -v$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 9. 2005

1. Naj bodo $A(-1,0,2)$, $B(1,0,1)$, $C(3,1,2)$ in $D(2,3,2)$ oglišča piramide $ABCD$. Premica p seka stranici AD in BC pod pravim kotom.

   (a) Zapiši enačbo premice p in izračunaj razdaljo med stranicama AD in BC.

   (b) V katerih točkah seka premica p koordinatne ravnine?

2. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_4[X]$ sta dana podprostora

   $$U = \mathcal{L}\{1+x-x^2+x^3+x^4, -1+2x-2x^2+2x^3-x^4, 2-x+x^2-x^3+2x^4\},$$
   $$V = \{p \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, p(0)+p'(0)=0, p(1)-p(0)=0, 3p(-1)+9p'(0)+p'''(0)=0\}.$$

   Določi razsežnosti podprostorov $U, V, U\cap V, U+V$ in zapiši primere njihovih baz.

3. Naj bo a pozitivno realno število in

   $$A = \begin{bmatrix} 2a & b & b \\ b & 2a & b \\ b & b & 2a \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Za katere vrednosti parametra b bo matrika A pozitivno definitna?

   (b) Naj bo $b=a$. Določi takšno matriko B, da bo $B^2 = A$.

4. Linearna preslikava $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je pravokotni projektor na podprostor

   $$U = \{(x,y,z,v) \in \mathbb{R}^4 | x-y-z=0, y-z+w=0\}.$$

   V standarni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ poišči matriki preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$. Evklidski prostor $\mathbb{R}^4$ je opremljen z običajnim skalarnim produktom!

Naloge so enakovredne.