Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 27. 1. 2006

1. Naj bodo $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,-2,1)$ in $D(2,-1,2)$ oglišča tristrane piramide $ABCD$. Določi presečišče telesnih višin v_A in v_B, ki imata krajišči v točkah A in B.

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -b \\ -1 & a & -b & 1 \\ -1 & b & a & 1 \\ b & -1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Izračunaj determinanto matrike A in nato glede na vrednosti parametrov a in b poišči rešitve homogenega linearnega sistema $Ax = 0$, kjer je $x \in \mathbb{R}^4$.

3. Poišči primer linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to M_2(\mathbb{R})$, ki zadošča pogojema
$$\ker \mathcal{A} = \{1 - x + x^2\} \quad \text{in} \quad \operatorname{im} \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$
Zapiši tudi matriko A, ki v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_2[X]$, $M_2(\mathbb{R})$ pripada tvoji preslikavi $\mathcal{A}$.

4. Realna kvadratna forma $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$\mathcal{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz - 4yz.$$
   (a) Z ortogonalnimi transformacijami prevedi formo $\mathcal{Q}$ v obliko s samimi kvadratnimi členi in napiši, kako se nove koordinate izražajo s starimi.

   (b) Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 4$? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 2. 2006

1. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi koordinatno izhodišče in seka premico
$$p: \frac{2-x}{2} = \frac{y}{\sqrt{6}} = \frac{z}{\sqrt{6}}$$
pod kotom $\pi/3$. Koliko rešitev ima naloga?

2. Naj bosta
$$U = \mathcal{L}\left\{1+x, 3+x^3, 3-x+2x^3, 1+x^3\right\},$$
$$V = \mathcal{L}\left\{2-x-x^3, 1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3, 2-x+x^2+2x^3\right\}$$
podprostora v vektorskem prostoru $\mathbb{R}[X]$. Poišči baze podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U+V$.

3. Poišči karakteristični polinom $p_A(\lambda)$, minimalni polinom $m_A(\lambda)$ in Jordanovo kanonično obliko J_A matrike
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
ter tako obrnljivo matriko P, da bo $J_A = P^{-1}AP$. Upoštevaj, da sta -1 in 2 edini lastni vrednosti matrike A!

4. Naj bo $\langle\cdot|\cdot\rangle$ tak skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^5$, da je množica
$$\{(1,0,0,0,1), (1,0,1,0,0), (0,1,0,0,1), (0,0,1,1,0), (0,0,0,1,-1)\}$$
ortonormirana. Vektorski podprostor U je definiran s predpisom
$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^5 | \langle x|a\rangle = 0, \langle x|b\rangle = 0\right\},$$
kjer je $a = (1,0,2,1,0)$ in $b = (0,1,1,1,1)$.
   (a) Določi podprostor $U^\perp$.
   (b) Poišči ortonormirano bazo podprostora $U^\perp$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 6. 2006

1. Dana je tristrana piramida $ABCD$. Dokaži, da se telesni višini v_A in v_B s krajiščema A in B piramide $ABCD$ sekata natanko tedaj, ko sta mimobežni nosilki stranic AB in CD pravokotni.

2. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico $p : x = 2y = z$ in $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na aplikativno os. Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ter poišči bazo jedra in slike preslikave $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

3. Dana je matrika
$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$
Poišči karakteristični polinom p_A, minimalni polinom m_A in Jordanovo kanonično obliko J_A.

4. Naj bo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tak skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}_3[X]$, da je množica
$$\left\{1 + x^3, 1 + x^2, 1 + x, 1\right\}$$
ortonormirana.
   (a) Določi pravilo za ta skalarni produkt.
   (b) Poišči kakšno bazo podprostora $\{x, x^3 - x^2\}^{\perp}$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2006

1. Zapiši koordinate oglišč B in C enakostraničnega trikotnika ΔABC, če poznaš oglišče $A(-1,2,-1)$ in veš, da leži stranica BC na premici p, določeni s presekom ravnin
$$\pi : 3x + y - z = 4 \quad \text{in} \quad \Sigma : x - 2y + 2z = -1.$$

2. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}(X) = AXA^T,$$
kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Za $n = 3$ in
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   določi razsežnost in bazo podprostora $\ker \mathcal{A}$.

3. Poišči karakteristični polinom, minimalni polinom in Jordanovo kanonično obliko matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Določi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da bo s predpisom
   $$\langle (x_1, y_1) \,|\, (x_2, y_2) \rangle = \lambda x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 y_1 y_2$$
   definiran skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$.
   (b) Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom iz točke (a), kjer je $\lambda = 2$. Linearni funkcional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deluje takole: $f(x, y) = 2x + y$, za vsak $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Določi Rieszov vektor, ki pripada funkcionalu f!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2006

1. Za geometrijska vektorja $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ velja $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -3$ in $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = 1$. Obravnavaj rešljivost enačbe:
$$3(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 4(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}).$$

2. Naj bo a dano realno število. Preslikava $\mathcal{A}$, ki slika iz prostora $\mathbb{R}_2[X]$ v prostor $\mathbb{R}^3$, je podana s predpisom
$$\mathcal{A}p = \left(p'(0) + a, 2p(0) + p(1), 3\int_0^1 p(t)\,dt\right).$$
Najprej določi parameter a tako, da bo preslikava $\mathcal{A}$ linearna. Nato zapiši matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah obeh prostorov in določi bazo jedra preslikave $\mathcal{A}$.

3. Naj bo
$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$
Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A. Zapiši tudi Jordanovo kanonično obliko matrike A ter določi minimalni polinom matrike A.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ realnih polinomov stopnje največ dva definiramo linearne funkcionale:
$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, \quad f_3(p) = \int_0^3 p(x)\,dx.$$
Dokaži, da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza duala $(\mathbb{R}_2[X])^*$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$ in poišči urejeno bazo $\{p_1, p_2, p_3\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$, da bo $\{f_1, f_2, f_3\}$ njej dualna baza.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 9. 2006

1. Dani sta ravnina $\pi : 2x - y + 3z = 1$ in premica p, ki je presek ravnin $y + 2z = 9$ in $2x + 3y = 11$. Poišči vse ravnine, ki so pravokotne na ravnino π, vzporedne premici p, in so od točke $T\,(3, -4, 1)$ oddaljene za $\sqrt{3}$.

2. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
in definiramo
$$U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) | XA - AX^T = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{X \in M_3(\mathbb{R}) | XA - A^T X = 0\}.$$
Pokaži, da sta množici U in V podprostora v prostoru matrik $M_3(\mathbb{R})$. Določi tudi baze podprostorov $U, V, U \cap V, U + V$!

3. Izračunaj determinanto
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom naj bo $\mathcal{A}$ projekcija na ravnino $\pi : 2x + y - z = 0$ v smeri premice $p : x = z = 0$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$.

Naloge so enakovredne.