Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 15. 11. 2002

1. Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Določi vektor $\vec{x}$, da bo
$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \alpha \quad \text{in} \quad \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

2. Dana sta vektorja $\vec{x} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{y} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Določi vektor $\vec{z}$, da bo pravokoten na vektor $\vec{y}$, da bo njegova dolžina $2\sqrt{11}$, in da bo volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{x}, \vec{y}$ in $\vec{z}$, enak 12. Koliko rešitev dobiš?

3. Presek ravnin $x + y - z = 2$ in $2x - y = 4$ je premica p. Določi premico q, ki seka premico p pod pravim kotom in gre skozi točko $T(2, 1, -2)$.

4. Naj bo $ABCDA'B'C'D'$ paralelepiped. Dokaži, da njegova telesna diagonala AC' prebada ravnino, ki jo določajo točke B, A' in D, v težišču trikotnika $\Delta BA'D$.

5. Glede na realna števila a, b in c obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{aligned} x + (a+1)\,y + 3z + (a+4)\,u &= b\ , \\ 2x + 2y - z + u &= 3\ , \\ x + y + u &= 1\ , \\ ay + 2z + (a+2)\,u &= c\ . \end{aligned}$$
V primeru, ko je sistem rešljiv, rešitve tudi zapiši!

Opomba. Pri prvih štirih nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $18 + 18 + 20 + 20 + 24$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 20. 12. 2002

1. (25) Reši matrično enačbo $A^T X B = A + \left(X^T A\right)^T$, kjer je

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Glede na parameter a določi $\operatorname{rank} X$. Kaj lahko poveš o obrnljivosti matrike X?

2. (25) Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $2n \times 2n$ velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{b}{2n} \\ 0 & \frac{a}{4} & \cdots & \cdots & \frac{b}{2(2n-1)} & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \frac{a}{n^2} & \frac{b}{n(n+1)} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{b}{n(n+1)} & \frac{a}{(n+1)^2} & \vdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \frac{b}{2(2n-1)} & \cdots & \cdots & \frac{a}{(2n-1)^2} & 0 \\ \frac{b}{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a}{4n^2} \end{vmatrix} = \frac{(a^2-b^2)^n}{(2n!)^2}.$$

   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 3$ [15 T].

3. (30) Naj bo

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

   podmnožica realnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$.

   (a) Dokaži, da je H realni vektorski podprostor prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je njegova dimenzija? Zapiši tudi primer baze podprostora H!

   (b) Preveri, da je podprostor H zaprt za matrično množenje.

   (c) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in H$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

4. (20) Naj bosta $U = \{p \in R_n[X] \,|\, \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0\}$ in $V = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p'(1) = 0\}$ vektorska podprostora polinomov stopnje največ 3. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 24. 1. 2003

1. Preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ sta definirani s predpisom:

$$\mathcal{A}p = \int_0^1 p(x)\,dx \quad \text{in} \quad \mathcal{B}p = p'(2) \quad \text{za vsak } p \in \mathbb{R}_n[X].$$

   (a) Dokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ linearni preslikavi.

   (b) Za primer $n = 3$ določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \operatorname{Ker}\mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $x = 0$ in naj bo $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zasuk prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi z za kot $\frac{\pi}{6}$ v negativnem smislu.

   (a) Kakšne matrike pripadajo linearnim preslikavam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{BA}$ v standardni bazi vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Kaj geometrijsko predstavljata jedro in slika preslikave $\mathcal{BA}$? Določi še lastne vrednosti in lastne podprostore preslikave $\mathcal{BA}$.

3. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $\{(1,2), (1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, zapiši njuno bazo.

   (b) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$.

4. Prepričaj se, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 17. 4. 2003

1. Poišči Jordanovo kanonično obliko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in tako matriko prehoda P, da bo $J_A = P^T AP$. Določi tudi karakteristični in minimalni polinom matrike A.

2. Naj bo $V = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A^T = A\right\}$ vektorski prostor simetričnih realnih $n \times n$ matrik. Definirajmo preslikavo $\langle .|. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\langle A|B \rangle = \text{sled}\,(AB)$$

za vsak $A, B \in V$.

   (a) Dokaži, da je $\langle .|. \rangle$ skalarni produkt na V.

   (b) Za primer $n = 2$ poišči ortonormirano bazo prostora V.

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava $\mathcal{A}$ projecira na premico $p : x = y = z$ vzdolž ravnine $\pi : x + y = 0$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$.

4. Realna kvadratna forma $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 12xy + 8xz + 4yz.$$

   (a) Zapiši simetrično matriko Q, ki pripada formi v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Z ortogonalnimi transformacijami prevedi formo $\mathcal{Q}$ v obliko s samimi kvadratnimi členi.

   (c) Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 27$? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Naloge so enakovredne.