Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 20. 11. 2003

1. V tetraedru $ABCD$ naj točka E razdeli stranico AC v razmerju $AE : EC = 2 : 1$, točka F stranico AD v razmerju $AF : FD = 1 : 1$ in točka G stranico BC v razmerju $BG : GC = 4 : 1$. Točke E, F in G določajo ravnino, ki seka stranico BD v točki T. V kakšnem razmerju točka T deli stranico BD?

2. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ geometrijski vektorji. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$; prostornino izrazi z mešanim produktom $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

3. Dani sta ravnini $\pi : x - y + z = 1$ in $\Sigma : 2x + y - 2z = 1$. Premica p naj bo presek ravnin π in Σ. Če vsako točko $T \in \pi$ prezrcalimo čez ravnino Σ dobimo ravnino π', ki je zrcalna slika ravnine π glede na ravnino Σ.

   (a) Zapiši enačbo premice p.

   (b) Zapiši enačbo ravnine π'.

4. Dani sta matriki $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ in $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Naj bo $A = 2XX^T + Y^TY$ in $B = XY + (XY)^T$

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n.

   (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko B. Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko zapisati v obliki

   $$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   kjer so α, β in γ realna števila.

Opomba. Pri prvih treh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 1. 2003

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(A+X) = \det A + \det X\}\,.$$
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Določi bazo in razsežnost podprostora V.

2. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, JA = AJ\}$ in $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, JA^T = AJ\}$, kjer je $J \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Za primer $n = 3$ in $J = E_{13} + E_{22} + E_{31} \in M_3(\mathbb{R})$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Dana je matrična enačba
$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Za katere vrednosti parametra a je dana enačba rešljiva?
   (b) Določi matriko X, če je $a = 4$.

4. Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $n \times n$ velja:
$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ -b & a & b & \cdots & b & b \\ -b & -b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b & -b & -b & \cdots & a & b \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((a+b)^n + (a-b)^n\right)\,.$$

   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 5$ [15 T].

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 31. 3. 2004

1. Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{T}$ v standardni bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$.
   (c) Glede na vrednosti parametrov a in b obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave $\mathcal{T}$. Za vsak primer posebej določi tudi bazo jedra!

2. Preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ pripada iz standardne baze prostora $\mathbb{R}_2[X]$ v bazo $\{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ matrika A in preslikavi $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$ pripada iz standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ v bazo $\{1+2x, 2+x\}$ prostora $\mathbb{R}_1[X]$ matrika B;
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{BA}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_2[X]$ in $\mathbb{R}_1[X]$?

3. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom:
$$\mathcal{A}(x,y,z) = -\frac{1}{3}(2x - 2y - z, -2x - y - 2z, -x - 2y + 2z).$$
   Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore preslikave $\mathcal{A}$. Opiši geometrijsko delovanje preslikave $\mathcal{A}$!

4. Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Z uporabo minimalnega polinoma dokaži, da A^{-1} obstaja in se da izraziti kot polinom matrike A natanko tedaj, ko 0 ni lastna vrednost matrike A.

Točke so razporejene po nalogah: $30 + 25 + 25 + 20$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 24. 5. 2004

1. Glede na standardno bazo in glede na običajni skalarni produkt v prostoru $\mathbb{R}^4$ določi matriko zrcaljenja čez podprostor
$$V = \{(x, y, z, w)\,|x + y - z - w = 0, x - y + z - w = 0\}\,.$$

2. Naj bosta u in v linearno neodvisna vektorja končno razsežnega realnega vektorskega prostora V s skalarnim produktom $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Linearni operator $\mathcal{A} : V \to V$ je definiran s predpisom $\mathcal{A}x = \langle x|v\rangle\, u$.
   (a) Določi predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.
   (b) Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore operatorja $\mathcal{A}$. Ali se (oz. kdaj se) da operator $\mathcal{A}$ diagonalizirati? Odgovor utemelji!

3. Naj bo linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podan s predpisom
$$\mathcal{A}\,(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, -x - z, 2x + 2y + 3z)\,.$$
   (a) Določi predpis za adjungiran operator $\mathcal{A}^*$. V $\mathbb{R}^3$ vzamemo običajni skalarni produkt.
   (b) Operator $\mathcal{A}^*$ je projektor. Določi podprostor in kot vzdolž katerega $\mathcal{A}^*$ slika na svojo zalogo vrednosti.

4. Realna kvadratna forma $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$\mathcal{Q}\,(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz.$$
   (a) Poišči ortogonalno bazo v $\mathbb{R}^3$, v kateri ima forma $\mathcal{Q}$ samo kvadratne člene. Zapiši tudi zveze med starimi in novimi spremenljivkami.
   (b) Katero ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q\,(x, y, z) = 6$? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Naloge so enakovredne.