Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 12. 2004

1. Dana je kocka $ABCDEFGH$ z osnovno stranico dolžine a. Naj telesna diagonala AG prebada trikotnik ΔCHF v točki T.
   (a) Z uporabo vektorskega in mešanega produkta izračunaj ploščino trikotnika ΔCHF in prostornino piramide $CHFA$.
   (b) Vektor $\overrightarrow{AT}$ izrazi z vektorji $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ in $\overrightarrow{AH}$. Kaj ugotoviš?

2. Dana je ravnina $\pi : 2x + y - z = 0$ in točki $A(-1, 2, 2)$, $B(3, 0, 0)$. Naj bo M množica točk v ravnini π, ki so enako oddaljene od točk A in B.
   (a) Določi množico M. Zapiši njeno enačbo!
   (b) Poišči vse tiste točke $T \in M$, za katere velja, da je trikotnik ΔATB pravokoten.

3. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Kateri vektorji $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ rešijo obe enačbi
$$[\vec{x}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = 0 \quad \text{in} \quad \vec{x} \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0} \ ?$$

4. Dana je matrika
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n, če je $A = 2I + J$.
   (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko J. Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko B zapisati v obliki $B = \alpha I + \beta J + \gamma J^2$, kjer so α, β in γ ustrezna realna števila.

Opomba. Pri prvih dveh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 25 + 20 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 17. 2. 2005

1. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici
$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A - A^T \text{ je diagonalna matrika} \right\} \quad \text{in}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$. Vse dane vektorske podprostore, glede na to, katere matrike vsebujejo, tudi ustrezno poimenuj!

2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in
$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -b \\ 1 & a & -b & 1 \\ 1 & -b & a & 1 \\ -b & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$
Izračunaj determinanto matrike $A_{a,b}$ in določi vse pare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pri katerih matrika $A_{a,b}$ ni obrnljiva.

3. Naj bodo $A, B, X \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Naj bo A matrika s celoštevilskimi koeficienti. Poišči potreben in zadosten pogoj, da bo obstajala inverzna matrika A^{-1}, ki bo imela tudi celoštevilske koeficiente.
   (b) Naj bo $\det B + \det A = 1$. Izračunaj determinanto matrike X, če med matrikami velja zveza $2A^2X - XB = 0$.

4. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$
Naj bo U množica vseh tistih matrik $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, za katere velja $XA^T = I$. Določi množico U in preveri, ali velja katera od naslednjih trditev:
   (a) U je vektorski podprostor v $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,
   (b) $U = X_0 + V$, kjer je V podprostor v $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ in X_0 fiksna matrika.

   Če velja katera od trditev, poišči eno od baz za nastopajoči podprostor.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 26. 4. 2005

1. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ naj bo linearna preslikava $\mathcal{A}_a : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definirana s predpisom
$$\mathcal{A}_a : p(x) \longmapsto \begin{bmatrix} p(0) + p(1) & p''(0) + ap''(1) \\ p'(0) & p'''(0) \end{bmatrix}.$$
   (a) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}_a$ v standardnih urejenih bazah prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Glede na vrednosti parametra a obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave $\mathcal{A}_a$. Za vsak primer posebej določi tudi bazi jedra in slike!

2. Naj bosta $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ in $\mathcal{B} : V \rightarrow W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za linearno preslikavo $\mathcal{BA} : U \rightarrow W$ velja relacija
$$\dim \operatorname{im}(\mathcal{BA}) = \dim \operatorname{im} \mathcal{A} - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}).$$

3. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{P}(x, y, z) = (-x + y + 2z, 6x - 2y - 6z, -4x + 2y + 5z).$$
   (a) Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{P}$.
   (b) S pomočjo točke (a) opiši zakaj je $\mathcal{P}$ geometrijska projekcija. Kam in vzdolž česa projecira?

4. Poišči Jordanovo kanonično obliko J_A, karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ in minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrike
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 8 & -6 \end{bmatrix},$$
če veš, da sta njeni edini lastni vrednosti enaki -1 in -2.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 3. 6. 2005

1. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
poišči tako unitarno matriko P, da bo $\bar{P}^T AP$ diagonalna matrika.

2. Vektorski prostor polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom
$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx. \tag{1}$$
   (a) Poišči kako ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je določen s predpisom $(\mathcal{A}p)(x) = (xp(x))'$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$. Določi predpis za adjungirani endomorfizem $\mathcal{A}^*$.

3. Na vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ so dani linearni funkcionali
$$f_i(p) = p(i-1), \quad i = 1, 2, 3.$$
   (a) Dokaži, da funkcionali $\{f_1, f_2, f_2\}$ tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}_2[X]^*$.
   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu f_2 glede na skalarni produkt definiran s predpisom (1)?

4. Naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje običajnega evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ preko premice $2x = y = 2z$. Opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$! V standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}^*$ in določi njene lastne vrednosti in lastne podprostore.

Naloge so enakovredne