Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika

# 1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 12. 2005

1. V tristrani piramidi $ABCD$ z osnovno ploskvijo $ABC$ je točka $E$ težišče trikotnika $\Delta BCD$, točka $F$ pa razpolovišče stranice $AC$. Označimo vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.
   (a) Naj bo $S$ točka, v kateri daljica $AE$ prebada trikotnik $\Delta FBD$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
   (b) Točka $G$ leži na daljici $FD$ tako, da se daljici $BG$ in $AE$ sekata. V kakšnem razmerju deli točka $G$ daljico $FD$?

2. Med vsemi premicami, ki ležijo v ravnini $\pi : x - 2y + 2z = 18$ in so vzporedne z ravnino $\Sigma : 2x - 4y - 5z = 0$, poišči premico $p$, ki je najbližja točki $A\,(0, 1, 1)$. Kolikšna je razdalja med premico $p$ in točko $A$?

3. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enako dolga linearno neodvisna vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$. Obravnavaj vektorsko enačbo
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} = \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{b}).$$

4. Dani sta matriki
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Naj bo $A = XY^T$ in $B = Y^T X$
   (a) Izračunaj $A^{2005}$.
   (b) Poišči vse matrike $X' \in M_3(\mathbb{R})$, za katere velja $BX' = B^T X'$. Preveri, da lahko vsako tako matriko zapišeš v obliki
$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$
   kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

**Opomba.** Pri prvih dveh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

# 2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 15. 2. 2006

1. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ realni $n \times n$ matriki.
   (a) Določi matriko $C \in M_n(\mathbb{R})$ tako, da bo množica
   $$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX - XB^T = C\right\}$$
   vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) V primeru $n = 3$ izračunaj razsežnost in poišči kako bazo prostora $U$, če je
   $$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$ :
   $$\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{b}{3} & \cdots & \frac{b}{n} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{4} & \frac{b}{6} & \cdots & \frac{b}{2n} \\ \frac{b}{3} & \frac{b}{6} & \frac{a}{9} & \cdots & \frac{b}{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b}{n} & \frac{b}{2n} & \frac{b}{3n} & \cdots & \frac{a}{n^2} \end{bmatrix}.$$
   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 5$ (15 točk).

3. Glede na vrednosti realnih parametrov $a$ in $b$ obravnavaj in reši linearni sistem:
   $$\begin{aligned} x - 2y + bz - v &= 0, \\ x - y - 2z + 2v &= 0, \\ 2x - 3y + bz - v &= 0, \\ x - y + 2z + 2av &= b. \end{aligned}$$

4. Naj bosta
   $$U = \mathcal{L}\left\{1 + x, 3 + x^3, 3 - x + 2x^3, 1 + x^3\right\} \qquad \text{in}$$
   $$V = \mathcal{L}\left\{2 - x - x^3, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x^2 + 2x^3, 2 - x + x^2 + 2x^3\right\}$$
   podprostora v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}[X]$. Poišči baze podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

# 3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 26. 4. 2006

1. Naj bosta $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x}=2\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{b}.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (c) V odvisnosti od vektorjev $\vec{a},\vec{b}$ določi podprostora $\ker\mathcal{A}$ in $\operatorname{im}\mathcal{A}$.

2. Linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ je odvajanje, torej $\mathcal{A}p=p'$. Linearni preslikavi $\mathcal{B}:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ pa v bazi $\{1,x+x^2,x-x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$ ustreza matrika
$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$
   Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$ pripada preslikavi $\mathcal{AB}$.

3. Endomorfizem $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{A}(x,y,z)=\frac{1}{5}(3x-4z,5y,-4x-3z)\,.$$
   (a) Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{A}$.
   (b) S pomočjo točke $(a)$ opiši geometrijsko delovanje preslikave $\mathcal{A}$.

4. Dana je matrika
$$A=\begin{bmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{bmatrix}.$$
   Poišči karakteristični polinom $p_A$, minimalni polinom $m_A$, Jordanovo kanonično obliko $J_A$ in matriko prehoda $P$, da bo $J_A=P^{-1}AP$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

# 4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 6. 2006

1. Vektorski prostor realnih polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p|q\rangle = p(-1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(1)q(1). \tag{1}$$

Ugotovi, kateri polinom iz podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X]\,|p(1) - p'(1) = 0\}$$

je najbližje polinomu $x^2 - x - 1$.

2. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ so podani linearni funkcionali

$$f_1(x,y,z) = z - x\ , \quad f_2(x,y,z) = x - y\ , \quad f_3(x,y,z) = y + z.$$

   (a) Dokaži, da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza duala $(\mathbb{R}^3)^*$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) Poišči urejeno bazo $\{v_1, v_2, v_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, da bo $\{f_1, f_2, f_3\}$ njej dualna baza.

3. Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je določen s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = xp'(x) + \int_0^x tp''(t)\,dt.$$

Določi, katera matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}^*$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$? Prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom (1)!

4. Endomorfizem $\mathcal{A}$ zasuče prostor $\mathbb{R}^3$ za $\pi/6$ v pozitivni smeri okrog osi, ki jo določa vektor $(1,-1,-1)$. V primerni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ in določi $\mathcal{A}(1,1,1)$!

Naloge so enakovredne.