Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni program

Dominik Benkovič

VAJE IZ VERJETNOSTI

Maribor, 2004

Kazalo

1 Verjetnostni račun

1.1 Osnovni primeri iz kombinatorike

1.1.1 Pravilo produkta - osnovni izrek kombinatorike

1. Nekdo ima v garderobi 4 pare čevljev, 2 obleki in 3 različna pokrivala. Na koliko načinov se lahko s tem obuje, obleče in pokrije?

2. (a) Določi število vseh deliteljev števila 720.

   (b) Določi število vseh deliteljev naravnega števila n.

3. Deklici sta nabrali na travniku 15 marjetic, 18 kalužnic, 17 lučk in 23 tulpik. Na koliko načinov si lahko razdelita cvetlice?

1.1.2 Pravilo vsote - pravilo vključitve in izključitve

1. Koliko je petmestnih števil, kjer število vsebuje cifro 5 in same različne sode cifre?

2. Koliko števil med 1 in 1000 ni deljivo z nobenim izmed števil 3, 5 in 7?

3. Na koliko načinov lahko 7 predmetov damo v 4 škatle, da ostane vsaj ena škatla prazna?

1.1.3 Permutacije brez ponavljanja

1. (a) Na koliko načinov lahko razporedimo na polico 3 leposlovne knjige, 4 učbenike in 2 strokovni knjigi?

   (b) Na koliko načinov lahko to naredimo, če morajo istovrstne knjige stati skupaj?

   (c) Na koliko načinov lahko to naredimo, če morajo le učbeniki stati skupaj?

2. (a) Na koliko načinov se lahko 7 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo?

   (b) Na koliko načinov se lahko 7 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo, če sta dva skregana in ne smeta sedeti skupaj?

1.1.4 Permutacije s ponavljanjem

1. Na koliko načinov lahko razvrstimo v vrsto 9 zastavic, med katerimi so 3 zastavice bele, 4 rdeče in 2 modri?

2. Na koliko načinov lahko 8 igrač razdelimo med 3 otroke tako, da mlajša dobita po 3 igrače, starejši otrok pa 2 igrači?

3. Kolikokrat se v produktu:

   (a) $(x+y)^8$ pojavi monom x^5y^3;

   (b) $(x+y+z+w)^8$ pojavi monom $x^2yz^3w^2$?

1.1.5 Variacije

1. Na koliko načinov je mogoče vreči 3 igralne kocke različnih barv? Koliko je metov, ki pokažejo različno število pik na posameznih kockah?

2. Na koliko načinov lahko iz kupa 32 kart potegnemo eno za drugo 3 karte,

   (a) če izvlečene karte vračamo;

   (b) če izvlečenih kart ne vračamo?

1.1.6 Kombinacije brez ponavljanja

1. Koliko trikotnikov je v ravnini določenih z n točkami, med katerimi ni nobena trojica na isti premici?

2. Imamo 20 kart za "šnops". Koliko je kombinacij 4 kart,

   (a) če sta med njimi dva asa;

   (b) če je med njimi vsaj ena rdeča karta?

3. Študent naredi izpit, če odgovori vsaj na 4 vprašanja od 6.

   (a) Na koliko načinov lahko opravi izpit?

   (b) Na koliko načinov lahko opravi izpit, če mora odgovoriti na prvi 2 vprašanji?

   (c) Na koliko načinov lahko opravi izpit, če mora odgovoriti vsaj na 2 od prvih 3 vprašanj?

4. Koliko rešitev v naravnih številih ima enačba $x + y + z + w = 10$?

5. Koliko je najkrajših poti v mreži $Z \times Z$ iz izhodišča $(0, 0)$ do točke $T(n, m)$, ki ne gredo skozi točko $A(p, q)$, kjer je $0 < p < n$ in $0 < q < m$?

1.1.7 Kombinacije s ponavljanjem

1. Na koliko načinov lahko izberemo 3 kepice sladoleda, če slaščičar prodaja 5 vrst sladoleda?

2. Imamo k kroglic in n barv. Na koliko načinov lahko pobarvamo kroglice?

1.2 Osnovni primeri iz klasične verjetnosti

1. Mečemo pošteno igralno kocko. Označimo z E_i dogodek, da pade na kocki i pik. Naj bodo podani naslednji dogodki: A-pade sodo število pik; B-pade liho število pik; C-padejo največ 4 pike; D-pade vsaj 5 pik.

   (a) Izrazi te dogodke z elementarnimi dogodki E_i.

   (b) Izračunaj njihove verjetnosti.

   (c) Kateri dogodki tvorijo popoln sistem dogodkov?

2. V nekem mestu imamo populacijo študentov, izmed njih naključno izberemo enega. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$izbran je študent (moškega spola);

   $B-$izbrana oseba ne kadi;

   $C-$izbrana oseba stanuje v študentskem domu.

   (a) Opiši dogodek $AB\overline{C}$.

   (b) Kdaj nastopi enakost $ABC = A$?

   (c) Kdaj velja $\overline{C} \subseteq B$ oz. $\overline{A} = B$?

3. Mečemo dve pošteni igralni kocki. Kakšna je verjetnost, da je vsota padlih pik 8 (vsaj10)?

4. Imamo kocko sestavljeno iz 1000 kockic, ki jo pobarvamo in razderemo. Izračunaj verjetnost, da naključno izberemo

   (a) kockico, ki ima pobarvani dve ploskvi;

   (b) kockico, ki ima pobarvano vsj eno ploskev;

   (c) 2 kockici in vsaj ena ima vsaj eno ploskev pobarvano.

5. Izmed m izdelkov je n izdelkov pokvarjenih. Izberemo k izdelkov. Kakšna je verjetnost, da je natanko l izdelkov pokvarjenih?

6. Imamo 10 knjig, od tega so 4 romani. Razporedimo jih na polico. Kakšna je verjetnost, da pridejo romani skupaj, če je miza ravna (okrogla)?

7. Imamo množici A in B z močjo $|A| = n$, $|B| = m$. Kakšna je verjetnost, da izmed vseh funkcij $f : A \to B$ izberemo injektivno funkcijo?

8. Naključno izberemo izberemo naravno število n.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je n deljiv s praštevilom p?

   (b) Kakšna je verjetnost, da se n^2 končuje s cifro 1?

1.3 Zahtevnejši primeri iz klasične verjetnosti

1. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da sta števili tuji.

2. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da sta števili tuji, če veš, da je prvo število sodo.

3. Imamo n parov čevljev. Naključno izberemo $2r$ čevljev. Izračunaj verjetnost, da

   (a) ne dobimo nobenega skupnega para;

   (b) je natanko en par kompleten;

   (c) je m parov kompletnih.

4. Imamo k kroglic in n predalov $k \geq n$. Kroglice naključno in neodvisno razporedimo v predale. Kakšna je verjetnost, da bo ostal

   (a) en predal prazen;

   (b) dva predala prazna;

   (c) m predalov praznih.

5. Na postaji imamo n ljudi in 4 (m) vagone. Vsak človek lahko vstopi v poljuben vagon. Izračunaj verjetnost, da noben vagon ne ostane prazen.

1.4 Geometrijska definicija verjetnosti

1. Janko in Metka sta dogovorjena za zmenek med 17. in 19. uro. Njun prihod na dogovorjeno mesto naključen in neodvisen. Vsak počaka pol ure in če drugega ni, potem odide. Kakšna je verjetnost, da do zmenka pride?

2. Imamo neskončno šahovsko tablo s stranico kvadrata a. Na tablo vržemo kovanec s premerom $2r < a$. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   $A-$ kovanec leži znotraj kvadrata;

   $B-$ kovanec seka natanko eno stranico.

3. Palico dolžine l naključno razlomimo na tri dele. Kakšna je verjetnost, da iz teh delov sestavimo trikotnik?

4. Z intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Označimo naslednja dogodka:

   $A-$ vsota kvadratov izbranih števil je manjša od 1,

   $B-$ vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je večja od 1.

   Izračunaj verjetnosti $P(A), P(B)$ in $P(AB)$.

5. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila. Izračunaj verjetnost, da

   (a) je vsota kvadratov manjša od 1;

   (b) njihova vsota leži na intervalu $[1, 2]$.

6. Naj bosta a in b naključno izbrani realni števili z lastnostjo $|a|, |b| < n$, kjer je n naravno število. Kakšna je verjetnost, da so koreni enačbe $x^2 + 2ax + b = 0$ realni?

1.5 Pogojna verjetnost

1. V skladišču imamo 20 izdelkov, od tega 16 kvalitetnih. Po vrsti izbiramo izbiramo izdelek za izdelkom dokler ne izvlečemo kvalitetnega. Kakšna je verjetnost dogodkov

   $A-$ šele v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   $B-$ vsaj v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   če izdelke vračamo oziroma jih ne vračamo?

2. Na neki šoli so dijaki naročeni na Presek. Anketa je pokazala, da 15% dijakov bere članke iz matematike, 20% jih bere fizikalne članke in 22% jih bere računalništvo. Matematične in fizikalne članke bere 5% dijakov, članke iz fizike in računalništva bere 7%, matematiko in računalništvo bere 8% dijakov. Vse članke berejo 3% dijakov. Izračunaj verjetnost, da naključno izbrani dijak:

   (a) ne bere navedenih člankov iz Preseka;

   (b) bere fizikalne ali matematične članke, če bere članke iz računalništva.

3. Verjetnost, da prvi študent reši nalogo, je 0.85, da jo reši drugi študent pa 0.9. Študenta neodvisno rešujeta nalogo. Kakšna je verjetnost:

   (a) da bo naloga rešena;

   (b) da oba študenta rešita nalogo;

   (c) da je nalogo rešil prvi študent, če je bila naloga rešena?

4. Na daljici z dolžino 8 cm nakjučno in neodvisno izberemo dve točki. Kakšna je verjetnost, da razdalja med točkama ne presega 2 cm, če je vsaj ena točka od krajišča oddaljena več kot 2 cm.

5. Vemo, da je prvi od dvojčkov deček. Kakšna je verjetnost, da je tudi drugi deček, če je verjetnost, da se rodita dečka enaka a, verjetnost, da se rodita deklici pa b?

6. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se delec z enako verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo stran bodisi za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leqslant m$ enot?

1.6 Formula popolne verjetnosti in Bayesov obrazec

1. Protiletalski top tri krat ustreli proti letalu. V prvem strelu je verjetnost zadetka 0.4, v drugem strelu 0.5 in v tretjem strelu 0.7. Pri čemer en zadetek sestreli letalo z verjetnostjo 0.2, dva zadetka sestrelita letalo z verjetnostjo 0.6, tri krat zadeto letalo je gotovo sestreljeno. Kakšna je verjetnost,

   (a) da je bilo letalo s tremi streli sestreljeno;

   (b) da je bilo letalo dva krat zadeto, če je bilo sestreljeno?

2. V žepu imamo pet kovancev. Trije so pošteni, grb pade z verjetnostjo 0.5, dva pa imata na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Pade grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na drugi strani grb?

3. V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 2 rdeči, v drugi žari 1 bela in 3 rdeče ter v tretji 3 bele in 1 rdeča kroglica. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo žaro, nato pa kroglico iz druge v tretjo žaro. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje žare. Kakšna je verjetnost, da je kroglica rdeča?

4. Igralca izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb. Kakšna je verjetnost,

   (a) da zmaga igralec, ki je igro začel;

   (b) da zmaga igralec, ki je bil drugi na potezi;

   (c) da se igra ne konča?

5. Igralca izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Zmaga tisti igralec, pri katerem grb pade drugič. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?

6. Verjetnost, da v igri zmaga prvi igralec je p, da zmaga drugi igralec pa $q = 1 - p$. Trije igralci A, B in C igrajo to igro po naslednjih pravilih: najprej igrata igralca A in B, pri tem je A prvi igralec, potem zmagovalec dvoboja, ki ostaja prvi igralec, igra z igralcem C. Torej, vedno se poraženec umakne iz igre in zmagovalec kot prvi igralec igra s preostalim. Igra se konča, ko igralec zmaga v dveh zaporednih dvobojih. Kakšne so verjetnosti za zmago posameznega igralca? Kakšne so te verjetnosti, če je igra poštena t.p. $p = 0.5$?

2 Slučajne spremenljivke

2.1 Diskretne slučajne spremenljivke

1. Poštar razdeli 4 pisma na slepo v 4 poštne predale, v vsak predal po eno pismo. Slučajna spremenljivka X pomeni število pisem na pravem naslovu.

   (a) X predstavi z verjetnostno funkcijo.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

   (c) Izračunaj matematično upanje.

2. Kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je p, mečemo dokler se prvič ne pojavi grb. Število metov, ki so potrebni za to, je slučajna spremenljivka X.

   (a) X predstavi z verjetnostno funkcijo.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

   (c) Izračunaj $E(X)$.

3. V žari imamo 4 bele in 3 rdeče kroglice. Naključno izberemo kroglico in je ne vrnemo. Postopek ponavljamo, dokler ne izberemo rdeče kroglice. Označimo s T število izvlečenih kroglic vključno z zadnjo rdečo kroglico. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T? Izračunaj tudi $E(T)$.

4. Naj bo diskretna slučajna spremenljivka porazdeljena z verjetnostno funkcijo

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

   (b) Določi slučajno spremenljivko X^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in izračunaj $E(X^n)$.

5. Naj bo celoštevilska slučajna spremenljivka X podana s predpisom

$$P(X = n) = \frac{c}{n^2}.$$

   Določi konstanto c in izračunaj $E(X)$ ter $D(X)$. Odgovor utemelji.

6. Celoštevilska slučajna spremenljivka X je podana s predpisom

$$P(X = n) = c\left(\frac{a}{a+1}\right)^n ; a > 0.$$

   (a) Določi konstanto c.

   (b) Vrednost slučajne spremenljivke Y je ostanek vrednosti slučajne spremenljivke X pri deljenju s 3. Kako je porazdeljena Y?

2.2 Rodovna funkcija

1. S pošteno igralno kocko igramo igro Človek ne jezi se. Če vržemo šestico, lahko gre figura v igro. Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X, ki meri število metov, ki so potrebni, da se vključimo v igro. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

2. Vprašalnik ima n vprašanj. Na vsako od njih ponuja k odgovorov, m napačnih in $k-m$ pravilnih. Nakjučno izberemo en odgovor na vsako vprašanje. Število pravilnih odgovorov je slučajna spremenljivka. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

3. Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}.$$

   Izračunaj $E(X)$ in določi verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X.

4. Poissonova porazdelitev s parametrom $\lambda > 0$ je podana s

$$P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

   Zapiši njeno rodovno funkcijo in izračunaj še matematično upanje in disperzijo.

5. Na poti gibanja avtomobila je n semaforjev. Verjetnost, da je posamezni semafor prepusten je p. Naj slučajna spremenljivka X_n meri število semaforjev, ki jih je avtomobil prevozil do prve zaustavitve.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X_n?

   (b) Zapiši rodovno funkcijo $G_{X_n}(t)$ in izračunaj $E_n(X)$.

   (c) Izračunaj $\lim_{n\to\infty} E_n(X)$.

2.3 Zvezne slučajne spremenljivke

1. Točko T izberemo slučajno na kvadratu $[0,2]\times[0,2]$. Slučajna spremenljivka X naj meri razdaljo te točke do najbližje stranice kvadrata. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve. Izračunaj tudi povprečno oddaljenost točke T do najbližje stranice.

2. (a) Določi število a tako, da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & ;\ x > 2 \\ 0 & ;\ x \le 2 \end{cases}$$

   gostota neke zvezne slučajne spremenljivke X.

   (b) Izračunaj in skiciraj graf porazdelitvene funkcije F_X.

(c) Izračunaj matematično upanje in disperzijo $E(X)$, $D(X)$, če obstajata, sicer izračunaj mediamo.

3. Gostota slučajne spremenljivke X je podana s predpisom $p(x) = \frac{a}{1+x^2}$.

   (a) Določi konstanto a, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X.

   (b) Če obstaja, izračunaj matematično upanje, sicer mediano.

4. Določi zvezo med a in b, tako da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-b^2x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

gostota porazdelitve slučajne spremenljivke X in določi matematično upanje ter disperzijo slučajne spremenljivke $Y = 3X + 1$.

5. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} kx & ; \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}.$$

   (a) Določi konstanto k.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

   (c) Izračunaj $n-$začetni moment z_n in spomočjo njih $E(X)$, $D(X)$ in asimetričnost $A(X)$.

   (d) Izračunaj mediano in semikvartilni razmik. Primerjaj ju z $E(X)$ in $D(X)$.

   (e) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?

6. Palico dolžine $2l$ naključno prelomimo. Dobljena dela palice sta sosednji stranici pravokotnika. Slučajna spremenljivka X naj meri ploščino dobljenega pravokotnika.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in nato še gostoto $p(x)$!

   (b) Kolikšna je povprečna ploščina tako dobljenega pravokotnika?

   (c) Kakšna je verjetnost, da bo ploščina pravokotnika manjša od $\frac{2}{3}$ največje možne ploščine?

7. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen enakomerno na intevalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Naj zvezna slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto. Kolikšna je povprečna ploščina romba?

8. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases} \qquad a > 0\,.$$

Izračunaj $k-$ti začetni moment z_k, matematično upanje, disperzijo in asimetričnost!

9. Na krožnici s polmerom R si izberimo dve točki A in B. Poišči matematično upanje dolžine tetive $\overline{AB}$, če veš, da je središčni kot (teh dveh točk) porazdeljen enakomerno.

10. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto p_X. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

11. Zvezna slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

Definirajmo novo slučajno spremenljivko $Y = \min\{1, |X|\}$. Kako je porazdeljena Y? Izračunaj $E(Y)$.

2.4 Aproksimcija binomske porazdelitve

1. Po podatkih je pri nas približno 1% ljudi levičarjev. Izračunaj verjetnost, da izmed 200 ljudi ne bodo več kot trije levičarji.

2. V veliki seriji izdelkov je 2% nekvalitetnih. Iz serije smo naključno izbrali 100 izdelkov. Kakšne so verjetnosti, da je med izvlečenimi izdelki:

   (a) točno 2 nekvalitetna,

   (b) najmanj 2 nekvalitetna,

   (c) največ 5 nekvalitetnih,

   (d) vsaj 2 in ne več kot 5 nekvalitetnih.

3. Križamo pšenico sort A in B. Verjetnost, da je križanec sorte A je $\frac{1}{4}$. Kakšna je verjetnost, da je med 4800 semeni križancev vsaj 1230 semen sorte A.

4. Skupina 400 strelcev strelja v isto tarčo. Verjetnost posameznega zadetka je 0.8. Kolikšne so verjetnosti, da je v tarči

   (a) vsaj 120 zadetkov,

   (b) največ 150 zadetkov,

   (c) med 310 in 330 zadetkov.

5. Privzeti smemo, da je v mirovanju pulz odraslega človeka porazdeljen po zakonu $N(65, 5)$. Kolikšna je verjetnost, da je pulz večji od 70, in verjetnost, da je med 60 in 90!

2.5 Slučajni vektorji

1. Naenkrat vržemo 3 poštene igralne kocke. Maksimalno število padlih pik naj bo slučajna spremenljivka X in minimalno število pik naj bo slučajna spremenljivka Y.

   (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y? Izračunaj najprej njuni porazdelitveni funkciji!

   (b) Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja (X, Y).

   (c) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

2. Istočasno vržemo pošten kovanec in igralno kocko. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo število pik na kocki. Vrednost slučajne spremenljivke Y pa je 0, če pade cifra in je 1, če pade grb.

   (a) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši verjetnostno tabelo.

   (b) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki $Z = XY$ in $W = X + Y$?

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto porazdelitve

$$p(x, y) = \begin{cases} cx^n (y - x)^m e^{-y} & ; \ 0 < x < y \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določi konstanto c in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Z = Y - X$.

4. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ; \ x, y \geq 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Kakšni sta robni porazdelitvi p_X in p_Y komponent X in Y? Ali sta X in Y neodvisni?

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$?

3 Statistika

1. Kocko vržemo 1200 krat. Pri tem smo dobili naslednje rezultate:

x_j	1	2	3	4	5	6
m_j	184	210	170	220	200	216

Preiskusimo hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$.

2. Hipotezo, da je kovanec K pošten, smo preizkusili tako, da smo 256-krat metali kovanec tako dolgo, dokler ni prvič padla cifra. Dobili smo naslednje rezultate

št. metov	1	2	3	4	5	6	7	več
št. izvedb	108	60	40	24	12	5	5	2

Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ oziroma $\alpha = 0.01$ hipotezo zavrnemo?

3. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 55 grbov in 45 cifer.

   (a) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je kovanec pošten.

   (b) Kolikšno je najmanjše (največje) število padlih grbov, da hipoteze o poštenosti kovanca ne zavrnemo?

   Reši nalogo na dva načina in sicer s χ^2- testom oz. s statistiko $T = \frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

4. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 70 grbov in 30 cifer. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da se število grbov pojavlja dvakrat pogosteje.

5. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 9.5$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 15$. S temi podatki testiramo hipotezo $H_0\,(a = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca: $n = 16$; $n = 30$? (Pomoč: uporabi statistiko $T = \frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n}$.)

6. Na vzorcu populacije $n = 200$ smo dobili naslednje rezultate slučajne spremennljivke X

x_j	-3	-1	0	2	4	7	10	12
m_j	2	8	23	60	45	30	22	10

Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je matematično upanje $a = 4$.

7. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena $N\,(a, \sigma)$, z znano disperzijo $\sigma = 2$. Na vzorcu 25 poskusov želimo preiskusiti hipotezo, da je $a = 0$ proti alternativi $a \neq 0$.

x_j	-3	-2	-1	0	1	2
m_j	3	5	6	7	1	3