Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Pedagoška fakulteta Maribor

Dominik Benkovič

VAJE IZ VERJETNOSTI

Računalništvo - univerzitetni program
Računalništvo - strokovni program
Matematika - enopredmetni študij
Računalništvo z matematiko

Maribor, 2002

Kazalo

1 Osnove verjetnostnega računa

1.1 Primeri iz kombinatorike

1. Trgovski potnik želi obiskati 4 mesta (LJ, MB, PT, KP).
   (a) Na koliko načinov lahko to stori?
   (b) Na koliko načinov lahko to stori, če mora iti najprej v MB?
2. Imamo 20 kart za "šnops". Koliko je kombinacij 4 kart,
   (a) če sta med njimi dva asa;
   (b) če je med njimi vsaj ena rdeča karta?
3. (a) Imamo 4 modre in 6 rdečih kroglic. Koliko različnih vzorcev dobimo, če kroglice zlagamo v vrsto eno zraven druge?
   (b) Imamo r_1 kroglic 1. barve, r_2 kroglic 2. barve, ..., r_k kroglic k. barve. Koliko različnih vzorcev dobimo, če kroglice zlagamo v vrsto eno zraven druge?
4. (a) Na koliko načinov se lahko 7 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo?
   (b) Na koliko načinov se lahko 7 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo, če sta dva skregana in ne smeta sedeti skupaj?
5. Koliko je petmestnih števil, kjer
   (a) je na prvem mestu soda cifra;
   (b) je na prvem mestu liha cifra;
   (c) je na prvem in zadnjem mestu soda cifra;
   (d) število vsebuje 0 in same različne lihe cifre.
6. Izračunaj število vseh deliteljev naravnega števila $n = p_1 p_2 ... p_k$, kjer so p_i različna praštevila.
7. Imamo 5 kroglic in 3 barve. Na koliko načinov lahko pobarvam kroglice?
8. Koliko je najkrajših poti v mreži $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ iz izhodišča $(0,0)$ do točke $T\,(n,m)$, ki ne gredo skozi točko $A\,(p,q)$, kjer je $0 < p < n$ in $0 < q < m$?

1.2 Osnovni primeri iz verjetnostnega računa

1. Mečemo pošteno igralno kocko. Označimo z E_i dogodek, da pade na kocki i pik. Naj bodo podani naslednji dogodki:

   $A-$pade sodo število pik;

   $B-$pade liho število pik;

   $C-$padejo največ 4 pike;

   $D-$pade vsej 5 pik.

   (a) Izrazi te dogodke z elementarnimi dogodki E_i.

   (b) Izračunaj njihove verjetnosti.

   (c) Kateri dogodki tvorijo popoln sistem dogodkov?

2. Mečemo dve pošteni igralni kocki. Kakšna je verjetnost, da je vsota padlih pik 8 (vsaj10)?

3. Naj bosta A in B dogodka in $A \oplus B$ njuna simetrična vsota.

   (a) Dokaži, da velja $A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$.

   (b) Naj bo $P\left(A\right) = p$, $P\left(B\right) = q$ in $P\left(A \cup B\right) = r$. Izračunaj verjetnosti $P\left(AB\right)$, $P\left(A\overline{B}\right)$ in $P\left(A \oplus B\right)$.

4. V nekem mestu imamo populacijo študentov, izmed njih naključno izberemo enega. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$izbran je študent (moškega spola);

   $B-$izbrana oseba ne kadi;

   $C-$izbrana oseba stanuje v študentskem domu.

   (a) Opiši dogodek $AB\overline{C}$.

   (b) Kdaj nastopi enakost $ABC = A$?

   (c) Kdaj velja $\overline{C} \subseteq B$ oz. $\overline{A} = B$?

5. Imamo kocko sestavljeno iz 1000 kockic, ki jo pobarvamo in razderemo. Izračunaj verjetnost, da naključno izberemo

   (a) kockico, ki ima pobarvani dve ploskvi;

   (b) kockico, ki ima pobarvano vsj eno ploskev;

   (c) 2 kockici in vsaj ena ima vsaj eno ploskev pobarvano.

6. Izmed m izdelkov je n izdelkov pokvarjenih. Izberemo k izdelkov. Kakšna je verjetnost, da je natanko l izdelkov pokvarjenih?

7. Imamo 10 knjig, od tega so 4 romani. Razporedimo jih na polico. Kakšna je verjetnost, da pridejo romani skupaj, če je polica ravna (okrogla)?

8. Imamo množici A in B z močjo $|A| = n$, $|B| = m$. Kakšna je verjetnost, da izmed vseh funkcij $f : A \to B$ izberemo injektivno funkcijo?

9. Naključno izberemo izberemo naravno število n.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je n deljiv s praštevilom p?

   (b) Kakšna je verjetnost, da se n^2 končuje s cifro 1?

10. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da obe števili nista deljivi s praštevilom p.

11. Imamo n parov čevljev. Naključno izberemo $2r$ čevljev. Izračunaj verjetnost, da

    (a) ne dobimo nobenega skupnega para;

    (b) je natanko en par kompleten.

12. Imamo 5 kroglic in 3 predale. Kroglice naključno in neodvisno razporedimo v predale. Kakšna je verjetnost,

    (a) da bo ostal en predal prazen;

    (b) da bosta ostala dva predala prazna?

1.3 Geometrijska definicija verjetnosti

1. Nakjučno in neodvisno izberemo dve števili z intervala $[0, 1]$. Kakšna je verjetnost, da je vsota danih števil manjša od 1, produkt pa večji od $\frac{2}{9}$?

2. Palico dolžine l naključno razlomimo na tri dele. Kakšna je verjetnost, da iz teh delov sestavimo trikotnik?

3. Imamo neskončno šahovsko tablo s stranico kvadrata a. Na tablo vržemo kovanec s premerom $2r < a$. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   $A-$ kovanec leži znotraj kvadrata;

   $B-$ kovanec seka natanko eno stranico.

4. V vsakem časovnem trenutku je enako verjetno, da prideta do sprejemnika dva različna signala. Sprejemnik bo zasičen, če je časovna razlika med prispelima signaloma manjša od τ. Kakšna je verjetnost, da bo v nekem času T sprejemnik zasičen?

5. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila. Izračunaj verjetnost, da

   (a) je vsota kvadratov manjša od 1;

   (b) njihova vsota manjša od 1.

6. Streljamo v tarčo s polmerom R. Izračunaj verjetnost, da zadenemo krog s polmerom d, če je enakoverjetno, da zadenemo vsako točko.

1.4 Pogojna verjetnost

1. V skladišču imamo 20 izdelkov, od tega 16 kvalitetnih. Po vrsti izbiramo izbiramo izdelek za izdelkom dokler ne izvlečemo kvalitetnega. Kakšna je verjetnost dogodkov

   $A-$ šele v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   $B-$ vsaj v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   če izdelke vračamo oziroma jih ne vračamo?

2. Na neki šoli so dijaki naročeni na Presek. Anketa je pokazala, da 15% dijakov bere članke iz matematike, 20% jih bere fizikalne članke in 22% jih bere računalništvo. Matematične in fizikalne članke bere 5% dijakov, članke iz fizike in računalništva bere 7%, matematiko in računalništvo bere 8% dijakov. Vse članke berejo 3% dijakov. Izračunaj verjetnost, da naključno izbrani dijak:

   (a) ne bere navedenih člankov iz Preseka;

   (b) bere fizikalne ali matematične članke, če bere članke iz računalništva.

3. Na daljici z dolžino 8 cm nakjučno in neodvisno izberemo dve točki. Kakšna je verjetnost dogodkov

   $A-$ točki sta vsaj 1 cm oddaljeni od krajišč;

   $B-$ vsaj ena točka je od krajišč oddalje na več kot 2 cm;

   $C-$ razdalja med točkama ne presega 2 cm

   in izračunaj še $P(C|B)$.

4. Verjetnost, da se pri dvojčkih rodita dva dečka je a, da se rodita dve deklici pa b. Kakšna je verjetnost, da sta se rodila dvojčka, če se je

   (a) prvi rodil deček,

   (b) rodil en deček?

5. Protiletalski top tri krat ustreli proti letalu. V prvem strelu je verjetnost zadetka 0.4, v drugem strelu 0.5 in v tretjem strelu 0.7. Pri čemer en zadetek sestreli letalo z verjetnostjo 0.2, dva zadetka sestrelita letalo z verjetnostjo 0.6, tri krat zadeto letalo je gotovo sestreljeno. Kakšna je verjetnost,

   (a) da je bilo letalo s tremi streli sestreljeno;

   (b) da je bilo letalo dva krat zadeto, če je bilo sestreljeno?

6. V žepu imamo pet kovancev. Trije so pošteni, grb pade z verjetnostjo 0.5, dva pa imata na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Pade grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na drugi strani grb?

7. Verjetnost, da prvi študent reši nalogo, je 0.85, da jo reši drugi študent pa 0.9. Študenta neodvisno rešujeta nalogo. Kakšna je verjetnost:

   (a) da bo naloga rešena;

   (b) da oba študenta rešita nalogo;

   (c) da je nalogo rešil prvi študent, če je bila naloga rešena?

8. V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 2 rdeči, v drugi žari 1 bela in 3 rdeče ter v tretji 3 bele in 1 rdeča kroglica. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo žaro, nato pa kroglico iz druge v tretjo žaro. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje žare. Kakšna je verjetnost, da je kroglica rdeča?

9. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku delec bodisi miruje bodisi se premakne za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leqslant m$ enot?

10. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se delec z enako verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo stran bodisi za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leqslant m$ enot?

11. Igralca izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb. Kakšna je verjetnost,

    (a) da zmaga igralec, ki je igro začel;

    (b) da zmaga igralec, ki je bil drugi na potezi;

    (c) da se igra ne konča?

12. Igralca izmenično mečeta kovanec. Verjetnost, da pade grb je p $(0 < p < 1)$. Če igralec vrže grb, dobi čokolado, sicer ne dobi ničesar. Zmaga tisti, ki ima prvi dve čokoladi prednosti. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?

13. Tristan in Izolda izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Tisti, ki vrže grb, dobi dve jabolki. Če vrže cifro, izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi tri jabolka prednosti.

(a) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in ni imel nobene prednosti? Ali je igra poštena?

(b) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in je imel eno jabolko prednosti?

1.5 Diskretne slučajne spremenljivke

1. Naj bo verjetnostna funkcija diskretne slučajne spremenljivke X podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Določi a tako, da bo X res diskretna slučajna spremenljivka.

   (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   (c) Izračunaj matematično upanje.

2. Kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je p, mečemo dokler se prvič ne pojavi grb. Število metov, ki so potrebni za to, je slučajna spremenljivka X.

   (a) X predstavi z verjetnostno funkcijo.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

   (c) Izračunaj $E(X)$.

3. Naj bo diskretna slučajna spremenljivka X porazdeljena z verjetnostno funkcijo

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

   (b) Določi slučajno spremenljivko X^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in izračunaj $E(X^n)$.

4. Na kvadratno mrežo s stranico kvadrata 2 enoti vržemo naključno kovanec s premerom 1 enoto. Poišči porazdelitev slučajne spremenljivke X, ki meri število stranic, ki jih kovanec seka. Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$.

5. V žari imamo 4 bele in 3 rdeče kroglice. Naključno izberemo kroglico in je ne vrnemo. Postopek ponavljamo, dokler ne izberemo rdeče kroglice. Označimo s T število izvlečenih kroglic vključno z zadnjo rdečo kroglico. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T? Izračunaj tudi $E(T)$.

1.6 Rodovna funkcija

1. S pošteno igralno kocko igramo igro Človek ne jezi se. Če vržemo šestico, lahko gre figura v igro. Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X, ki meri število metov, ki so potrebni, da se vključimo v igro. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

2. Vprašalnik ima 18 vprašanj. Na vsako od njih ponuja 3 odgovore, 2 napača in 1 pravilen. Nakjučno izberemo en odgovor na vsako vprašanje. Število pravilnih odgovorov je slučajna spremenljivka X. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

3. Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}.$$

Izračunaj $E(X)$ in določi verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X.

1.7 Zvezne slučajne spremenljivke

1. (a) Določi število a tako, da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & ; \ x > 2 \\ 0 & ; \ x \leq 2 \end{cases}$$

gostota neke zvezne slučajne spremenljivke X.

(b) Izračunaj in skiciraj graf porazdelitvene funkcije F_X.

(c) Izračunaj matematično upanje in disperzijo $E(X)$, $D(X)$, če obstajata, sicer izračunaj mediano.

2. Gostota slučajne spremenljivke X je podana s predpisom $p(x) = \frac{a}{1+x^2}$.

(a) Določi konstanto a, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X.

(b) Če obstaj, izračuanj matematično upanje, sicer mediano.

3. Določi zvezo med a in b, tako da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-b^2 x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

gostota porazdelitve slučajne spremenljivke X in določi matematično upanje ter disperzijo slučajne spremenljivke $Y = 3X + 1$.

4. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} kx & ; \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto k.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

(c) Izračunaj $n-$začetni moment z_n in spomočjo njih $E(X)$, $D(X)$ in asimetričnost $A(X)$.

(d) Izračunaj mediano in semikvartilni razmik. Primerjaj ju z $E(X)$ in $D(X)$.

(e) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?

5. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{|x|+1} & ;\ x \in [-3, 3] \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ ter določi konstanto a in izračunaj $E(X)$.

(b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?

6. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a\left(-x^2 + 2|x|\right) & ;\ x \in [-2, 2] \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto a.

(b) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$.

1.8 Slučajni vektorji

1. Vzemimo dve pošteni igralni kocki in ju vržemo.

(a) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y), kjer slučajna spremenljivka X meri minimalno število pik na obeh kockah in slučajna spremenljivka Y meri maksimalno število pik na obeh kockah.

(b) Kakšni sta robni porazdelitvi slučajnega vektorja (X, Y)?

(c) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

2. Istočasno vržemo pošten kovanec in igralno kocko. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo število pik na kocki. Vrednost slučajne spremenljivke Y pa je 0, če pade cifra in je 1, če pade grb.

(a) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši verjetnostno tabelo.

(b) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki $Z = XY$ in $W = X + Y$?

3. Naj bo gostota zveznega slučajnega vektorja (X, Y) podana kot

$$p(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2) & ; -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto a.
   (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y).
   (c) Kakšni sta robni porazdelitvi X in Y? Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?
   (d) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. Celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni po zakonu

$$x_k = P[X = k] = 2^{-k-1} \quad \text{in} \quad y_k = P[Y = k] = 2^k 3^{-k-1} \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

   Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y). Izračunaj porazdelitveni zakon spremenljivke $Z = |X - Y|$.

1.9 Statistika

1. Kocko vržemo 1200 krat. Pri tem smo dobili naslednje rezultate:

x_j	1	2	3	4	5	6
m_j	184	210	170	220	200	216

   Preiskusimo hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$.

2. Hipotezo, da je kovanec K pošten, smo preizkusili tako, da smo 256-krat metali kovanec tako dolgo, dokler ni prvič padla cifra. Dobili smo naslednje rezultate

št. metov	1	2	3	4	5	6	7	več
št. izvedb	108	60	40	24	12	5	5	2

   Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ oziroma $\alpha = 0.01$ hipotezo zavrnemo?

3. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 55 grbov in 45 cifer.

   (a) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je kovanec pošten.
   (b) Kolikšno je najmanjše (največje) število padlih grbov, da hipoteze o poštenosti kovanca ne zavrnemo?

   Reši nalogo na dva načina in sicer s χ^2- testom oz. s statistiko $T = \frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

4. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 70 grbov in 30 cifer. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da se število grbov pojavlja dvakrat pogosteje.

5. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 9.5$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 15$. S temi podatki testiramo hipotezo $H_0\,(a = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca:

   (a) $n = 16$,

   (b) $n = 30$?

   (Pomoč: uporabi statistiko $T = \frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n}$.)

6. Na vzorcu populacije $n = 200$ smo dobili naslednje rezultate slučajne spremenljivke X, ki je porazdeljena normalno $N\,(a, \sigma)$

x_j	-3	-1	0	2	4	7	10	12
m_j	2	8	23	60	45	30	22	10

   Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je matematično upanje $a = 4$.

7. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena $N\,(a, \sigma)$, z znano disperzijo $\sigma = 2$. Na vzorcu 25 poskusov želimo preiskusiti hipotezo, da je $a = 0$ proti alternativi $a \neq 0$.

x_j	-3	-2	-1	0	1	2
m_j	3	5	6	7	1	3

.

2 Verjetnostni račun in statistika

2.1 Primeri iz kombinatorike

1. (a) Imamo 4 modre in 6 rdečih kroglic. Koliko različnih vzorcev dobimo, če kroglice zlagamo v vrsto eno zraven druge?

   (b) Imamo r_1 kroglic 1. barve, r_2 kroglic 2. barve, ..., r_k kroglic k. barve. Koliko različnih vzorcev dobimo, če kroglice zlagamo v vrsto eno zraven druge?

2. (a) Na koliko načinov se lahko n ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo?

   (b) Na koliko načinov se lahko n ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo, če sta dva skregana in ne smeta sedeti skupaj?

3. Koliko je petmestnih števil, kjer

   (a) je na prvem mestu soda cifra;

   (b) je na prvem mestu liha cifra;

   (c) je na prvem in zadnjem mestu soda cifra;

   (d) število vsebuje 0 in same različne lihe cifre;

   (e) je število sodo, vsebuje cifri 0 in 1 ter so vse cifre različne.

4. Izračunaj število vseh deliteljev naravnega števila n.

5. Imamo $2 \leq n$ pevcev in m pevk, ki bodo nastopili na koncertu. Na koliko načinov lahko sestavimo spored, če mora koncert začeti in končati pevec?

6. Imamo k kroglic in n barv. Na koliko načinov lahko pobarvam kroglice?

7. Koliko je najkrajših poti v mreži $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ iz izhodišča $(0, 0)$ do točke $T\,(n, m)$, ki ne gredo skozi točko $A\,(p, q)$, kjer je $0 < p < n$ in $0 < q < m$?

2.2 Osnovni primeri iz verjetnostnega računa

1. Mečemo pošteno igralno kocko. Označimo z E_i dogodek, da pade na kocki i pik. Naj bodo podani naslednji dogodki:

   $A-$pade sodo število pik;

   $B-$pade liho število pik;

   $C-$padejo največ 4 pike;

   $D-$pade vsej 5 pik.

   (a) Izrazi te dogodke z elementarnimi dogodki E_i.

(b) Izračunaj njihove verjetnosti.

(c) Kateri dogodki tvorijo popoln sistem dogodkov?

2. Mečemo dve pošteni igralni kocki. Kakšna je verjetnost, da je vsota padlih pik 8 (vsaj10)?

3. Naj bosta A in B dogodka in $A \oplus B$ njuna simetrična vsota.

   (a) Dokaži, da velja $A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$.

   (b) Naj bo $P(A) = p$, $P(B) = q$ in $P(A \cup B) = r$. Izračunaj verjetnosti $P(AB)$, $P\left(A\overline{B}\right)$ in $P(A \oplus B)$.

4. V nekem mestu imamo populacijo študentov, izmed njih naključno izberemo enega. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$izbran je študent (moškega spola);

   $B-$izbrana oseba ne kadi;

   $C-$izbrana oseba stanuje v študentskem domu.

   (a) Opiši dogodek $AB\overline{C}$.

   (b) Kdaj nastopi enakost $ABC = A$?

   (c) Kdaj velja $\overline{C} \subseteq B$ oz. $\overline{A} = B$?

5. Imamo kocko sestavljeno iz 1000 kockic, ki jo pobarvamo in razderemo. Izračunaj verjetnost, da naključno izberemo

   (a) kockico, ki ima pobarvani dve ploskvi;

   (b) kockico, ki ima pobarvano vsj eno ploskev;

   (c) 2 kockici in vsaj ena ima vsaj eno ploskev pobarvano.

6. Izmed m izdelkov je n izdelkov pokvarjenih. Izberemo k izdelkov. Kakšna je verjetnost, da je natanko l izdelkov pokvarjenih?

7. Imamo 10 knjig, od tega so 4 romani. Razporedimo jih na polico. Kakšna je verjetnost, da pridejo romani skupaj, če je polica ravna (okrogla)?

8. Imamo množici A in B z močjo $|A| = n$, $|B| = m$. Kakšna je verjetnost, da izmed vseh funkcij $f : A \to B$ izberemo injektivno funkcijo?

9. Naključno izberemo izberemo naravno število n.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je n deljiv s praštevilom p?

   (b) Kakšna je verjetnost, da se n^2 končuje s cifro 1?

10. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da sta števili tuji.

11. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da sta števili tuji, če veš, da je prvo število sodo.

12. Imamo n parov čevljev. Naključno izberemo $2r$ čevljev. Izračunaj verjetnost, da

    (a) ne dobimo nobenega skupnega para;

    (b) je natanko en par kompleten;

    (c) je m parov kompletnih.

13. Imamo k kroglic in n predalov $k \geq n$. Kroglice naključno in neodvisno razporedimo v predale. Kakšna je verjetnost, da bo ostal

    (a) en predal prazen;

    (b) dva predala prazna;

    (c) m predalov praznih.

14. Na postaji imamo n ljudi in 4 (m) vagone. Vsak človek lahko vstopi v poljuben vagon. Izračunaj verjetnost, da noben vagon ne ostane prazen.

2.3 Geometrijska definicija verjetnosti

1. Nakjučno in neodvisno izberemo dve števili z intervala $[0, 1]$. Kakšna je verjetnost, da je vsota danih števil manjša od 1, produkt pa večji od $\frac{2}{9}$?

2. Z intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Označimo naslednja dogodka:

   $A-$ vsota kvadratov izbranih števil je manjša od 1,

   $B-$ vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je večja od 1.

   Izračunaj verjetnosti $P(A), P(B)$ in $P(A \cap B)$.

3. Palico dolžine l naključno razlomimo na tri dele. Kakšna je verjetnost, da iz teh delov sestavimo trikotnik?

4. Imamo neskončno šahovsko tablo s stranico kvadrata a. Na tablo vržemo kovanec s premerom $2r < a$. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   $A-$ kovanec leži znotraj kvadrata;

   $B-$ kovanec seka natanko eno stranico.

5. V vsakem časovnem trenutku je enako verjetno, da prideta do sprejemnika dva različna signala. Sprejemnik bo zasičen, če je časovna razlika med prispelima signaloma manjša od τ. Kakšna je verjetnost, da bo v nekem času T sprejemnik zasičen?

6. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila. Izračunaj verjetnost, da

   (a) je vsota kvadratov manjša od 1;

   (b) njihova vsota leži na intervalu $[1, 2]$.

7. Streljamo v tarčo s polmerom R. Izračunaj verjetnost, da zadenemo krog s polmerom d,

   (a) če je enakoverjetno, da zadenemo vsako točko;

   (b) če je verjetnost, da zadenemo območje S enaka

$$\frac{1}{2\pi R} \iint_S \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. Naj bosta a in b naključno izbrani realni števili z lastnostjo $|a|, |b| < n$, kjer je n naravno število. Kakšna je verjetnost, da so koreni enačbe $x^2 + 2ax + b = 0$ realni?

2.4 Pogojna verjetnost

1. V skladišču imamo 20 izdelkov, od tega 16 kvalitetnih. Po vrsti izbiramo izbiramo izdelek za izdelkom dokler ne izvlečemo kvalitetnega. Kakšna je verjetnost dogodkov

   $A-$ šele v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   $B-$ vsaj v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   če izdelke vračamo oziroma jih ne vračamo?

2. Na daljici z dolžino 8 cm nakjučno in neodvisno izberemo dve točki. Kakšna je verjetnost dogodkov

   $A-$ točki sta vsaj 1 cm oddaljeni od krajišč;

   $B-$ vsaj ena točka je od krajišč oddalje na več kot 2 cm;

   $C-$ razdalja med točkama ne presega 2 cm

   in izračunaj še $P(C|B)$.

3. Verjetnost, da se pri dvojčkih rodita dva dečka je a, da se rodita dve deklici pa b. Kakšna je verjetnost, da sta se rodila dvojčka, če se je
   (a) prvi rodil deček,
   (b) rodil en deček?
4. Protiletalski top tri krat ustreli proti letalu. V prvem strelu je verjetnost zadetka 0.4, v drugem strelu 0.5 in v tretjem strelu 0.7. Pri čemer en zadetek sestreli letalo z verjetnostjo 0.2, dva zadetka sestrelita letalo z verjetnostjo 0.6, tri krat zadeto letalo je gotovo sestreljeno. Kakšna je verjetnost,
   (a) da je bilo letalo s tremi streli sestreljeno;
   (b) da je bilo letalo dva krat zadeto, če je bilo sestreljeno?
5. V žepu imamo pet kovancev. Trije so pošteni, grb pade z verjetnostjo 0.5, dva pa imata na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Pade grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na drugi strani grb?
6. Verjetnost, da tarčo zadene prvi strelec je 0.8, da jo zadene drugi strelec pa 0.4. Kakšna je verjetnost, da je tarčo zadel prvi strelec, če je bila tarča zadeta enkrat?
7. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se delec z enako verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo stran bodisi za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leqslant m$ enot?
8. Igralca izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb. Kakšna je verjetnost,
   (a) da zmaga igralec, ki je igro začel;
   (b) da zmaga igralec, ki je bil drugi na potezi;
   (c) da se igra ne konča?
9. V vsaki ponovitvi poskusa je verjetnost, da se zgodi dogodek A enaka p. Kakšna je verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa dogodek A zgodi sodo krat?
10. Igralca izmenično mečeta kovanec. Verjetnost, da pade grb je p $(0 < p < 1)$. Če igralec vrže grb, dobi čokolado, sicer ne dobi ničesar. Zmaga tisti, ki ima prvi dve čokoladi prednosti. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?
11. Tristan in Izolda imata enako število jabolk. Izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Tisti, ki vrže grb, dobi dve jabolki. Če vrže cifro, izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi tri jabolka prednosti.
    (a) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel? Ali je igra poštena?
    (b) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in je imel eno jabolko prednosti?

2.5 Diskretne slučajne spremenljivke

1. Naj bo verjetnostna funkcija diskretne slučajne spremenljivke X podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Določi a tako, da bo X res diskretna slučajna spremenljivka.

   (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   (c) Izračunaj matematično upanje.

2. Kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je p, mečemo dokler se prvič ne pojavi grb. Število metov, ki so potrebni za to, je slučajna spremenljivka X.

   (a) X predstavi z verjetnostno funkcijo.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

   (c) Izračunaj $E(X)$.

3. Naj bo diskretna slučajna spremenljivka porazdeljena z verjetnostno funkcijo

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

   (b) Določi slučajno spremenljivko X^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in izračunaj $E(X^n)$.

4. Naj bo celoštevilska slučajna spremenljivka X podana s predpisom

$$P(X = n) = \frac{c}{n^2}.$$

   Določi konstanto c in izračunaj $E(X)$ ter $D(X)$. Odgovor utemelji.

5. Na kvadratno mrežo s stranico kvadrata 2 enoti vržemo naključno kovanec s premerom 1 enoto. Poišči porazdelitev slučajne spremenljivke X, ki meri število stranic, ki jih kovanec seka. Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$.

6. V prvi posodi so 3 črne in 2 beli kroglici, v drugi pa 3 bele. Iz prve v drugo posodo naključno prenesemo 2 kroglici. Potem pa iz druge v prvo posodo 3 kroglice. Izračunaj povprečno število belih kroglic v prvi posodi.

7. Celoštevilska slučajna spremenljivka X je podana s predpisom

$$P(X = n) = c\left(\frac{a}{a+1}\right)^n ; a > 0.$$

   (a) Določi konstanto c.

   (b) Vrednost slučajne spremenljivke Y je ostanek vrednosti slučajne spremenljivke X pri deljenju s 3. Kako je porazdeljena Y?

2.6 Rodovna funkcija

1. S pošteno igralno kocko igramo igro Človek ne jezi se. Če vržemo šestico, lahko gre figura v igro. Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X, ki meri število metov, ki so potrebni, da se vključimo v igro. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

2. Vprašalnik ima n vprašanj. Na vsako od njih ponuja k odgovorov, m napačnih in $k-m$ pravilnih. Nakjučno izberemo en odgovor na vsako vprašanje. Število pravilnih odgovorov je slučajna spremenljivka. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

3. Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}.$$

Izračunaj $E(X)$ in določi verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X.

2.7 Zvezne slučajne spremenljivke

1. (a) Določi število a tako, da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & ; x > 2 \\ 0 & ; x \le 2 \end{cases}$$

gostota neke zvezne slučajne spremenljivke X.

(b) Izračunaj in skiciraj graf porazdelitvene funkcije F_X.

(c) Izračunaj matematično upanje in disperzijo $E(X)$, $D(X)$, če obstajata, sicer izračunaj mediamo.

2. Gostota slučajne spremenljivke X je podana s predpisom $p(x) = \frac{a}{1+x^2}$.

(a) Določi konstanto a, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X.

(b) Če obstaj, izračuanj matematično upanje, sicer mediano.

3. Slučajna spremenljivka X ima gostoto $p(x) = a\,|x|^3 e^{-x^2}$.

(a) Določi konstanto a, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X.

(b) Poišči gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Y = X^2$.

(c) Izračunaj $P[Y \ge 1]$.

4. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} kx & ; 0 \le x \le 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto k.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X.

(c) Izračunaj $n-$začetni moment z_n in spomočjo njih $E(X)$, $D(X)$ in asimetričnost $A(X)$.

(d) Izračunaj mediano in semikvartilni razmik. Primerjaj ju z $E(X)$ in $D(X)$.

(e) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?

5. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \qquad a > 0\,.$$

Izračunaj $k-$ti začetni moment z_k, matematično upanje, disperzijo in asimetričnost!

6. Na krožnici s polmerom R si izberimo dve točki A in B. Poišči matematično upanje dolžine tetive $\overline{AB}$, če veš, da je središčni kot (teh dveh točk) porazdeljen enakomerno.

7. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto p_X. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

8. Zvezna slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,.$$

Definirajmo novo slučajno spremenljivko $Y = \min\{1, |X|\}$. Kako je porazdeljena Y? Izračunaj $E(Y)$.

9. Naj bo slučajna spremenljivka porazdeljena enakomerno na intervalu $(0, 1)$. Izračunaj porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Y = -\frac{\ln(1-X)}{a}$, $a > 0$.

2.8 Slučajni vektorji

1. Istočasno vržemo pošten kovanec in igralno kocko. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo število pik na kocki. Vrednost slučajne spremenljivke Y pa je 0, če pade cifra in je 1, če pade grb.

   (a) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši verjetnostno tabelo.

   (b) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki $Z = XY$ in $W = X + Y$?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto porazdelitve

$$p(x, y) = \begin{cases} cx^n (y-x)^m e^{-y} & ; 0 < x < y \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Določi konstanto c in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Z = Y - X$.

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto porazdelitve

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}.$$

(a) Določi robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$.

(b) Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

(c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. Naj bo slučajni vektor (X, Y) podan z gostoto $p_{X,Y}(x, y)$. Kako je porazdeljen novi slučajni vektor (U, V), če je $U = X + Y$ in $V = X - Y$? (Torej $p_{U,V}(u, v) =?$)

5. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x^2+y^2)^2} & ;\ x > 0, y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto c.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (U, V), kjer je $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ in $V = \sqrt{\frac{Y}{X}}$.

(c) Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?

2.9 Statistika

1. Kocko vržemo 1200 krat. Pri tem smo dobili naslednje rezultate:

x_j	1	2	3	4	5	6
m_j	184	210	170	220	200	216

Na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ preiskusimo hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko.

2. Hipotezo, da je kovanec K pošten, smo preizkusili tako, da smo 256−krat metali kovanec tako dolgo, dokler ni prvič padla cifra. Dobili smo naslednje rezultate

št. metov	1	2	3	4	5	6	7	več
št. izvedb	108	60	40	24	12	5	5	2

Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ oziroma $\alpha = 0.01$ hipotezo zavrnemo?

3. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 55 grbov in 45 cifer.

(a) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je kovanec pošten.

(b) Kolikšno je najmanjše (največje) število padlih grbov, da hipoteze o poštenosti kovanca ne zavrnemo?

Reši nalogo na dva načina in sicer s χ^2- testom oz. s statistiko $T = \frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

4. Pri tovarniški kontroli so naključno izbrali 1000 izdelkov in pri njih ugotovili število napak X. Dobljeni rezultati so predstavljeni v tabeli

X	0	1	2	3	4	5	več
n_k	220	330	261	121	55	13	0
p_k	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0.004

.

Sumili so, da je število napak porazdeljeno po Poissonovem zakonu, to je $p_k = \frac{1}{k!}a^k e^{-a}$, kjer je $a > 0$.

(a) Z ustrezno cenilko določi a, za katerega so že izračunane teoretične verjetnosti posameznih razredov.

(b) Ali so dobljeni rezultati, na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$, v nasprotju z domnevo, da je spremenljivka X porazdeljena po Poissonovem zakonu?

5. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 9.5$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 15$. S temi podatki testiramo hipotezo $H_0\,(a = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca:

(a) $n = 16\,,$

(b) $n = 30\,?$

(Pomoč: uporabi statistiko $T = \frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n}$.)

6. Na vzorcu populacije $n = 200$ smo dobili naslednje rezultate slučajne spremenljivke X, ki je porazdeljena normalno $N\,(a, \sigma)$

x_j	-3	-1	0	2	4	7	10	12
m_j	2	8	23	60	45	30	22	10

.

Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je matematično upanje $a = 4$.

7. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena $N\,(a, \sigma)\,,$ z znano disperzijo $\sigma = 2$. Na vzorcu 25 poskusov želimo preiskusiti hipotezo, da je $a = 0$ proti alternativi $a \neq 0$.

x_j	-3	-2	-1	0	1	2
m_j	3	5	6	7	1	3

.

8. Znano je, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 2 kg enak 0.01. V vzorcu 15-tih vrečk sladkorja izračunamo standardni odklon 0.018. Na nivoju značilnosti preveri hipotezo, da je standardni odklon v obeh primerih enak.

3 Verjetnostni račun - Matematika dodatno

3.1 Statistika

1. Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$, kjer sta oba parametra a in σ neznana. Določi interval zaupanja za a na stopnji zaupanja $1-\alpha$, kjer je $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$.

2. Raziskujemo verjetnost pojavljanja dogodka A v nekem eksperimentu. Naj se v 100 poskusih dogodek A zgodi 32 krat. Na stopnji zaupanja $1-\alpha$, kjer je $\alpha = 0.05$, določi interval zaupanja za verjetnost $P(A)$.

3. Preiskus neodvisnosti s kontingenčno tabelo. Na populaciji so preverjali neodvisnost barve las in barve oči. Rezultati so podani v tabeli, kjer Y meri barvo las in X meri barvo oči.

	blond	rjava	črna	rdeča	
modre	177	81	19	5	282
sivo zelene	94	139	74	5	312
rjave	11	44	29	2	86
	282	264	122	12	680

   Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0.01$ zavrnemo hipotezo, da sta barva las in barva oči neodvisno razporejeni na populaciji?

4. Od 14 na slepo izbranih elementov neke populacije, ima v 10-tih primerih slučajna spremenljivka X večjo vrednost kot Y, v dveh primerih je ta vrednost manjša in v dveh primerih enaka. Preiskusi s temi podatki hipotezo na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$, da sta porazdelitveni funkciji X in Y enaki.

5. Enaka naloga kot prej le, da je sedaj vzorec veliki $n = 1000$, in slučajna spremenljivka X zavzame v 425-tih primerih večjo vrednost od Y, v preostalih je vrednost slučajne spremenljivke Y večja.

6. Naj za slučajni spremenljivki X in Y velja $E(X) = E(Y) = 0$ in $D(X) = D(Y)$. Izračunaj $K(U, V)$, kjer je $U = X + Y$ in $V = X - Y$.

7. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s končno disperzijo in $a, c > 0$ in b, d realna števila. Za slučajni spremenljivki $U = aX + b$ in $V = cY + d$ izračunaj korelaciski koeficient (izrazi ga z $r(X, Y)$).

8. Pri ugotavljanju odvisnosti med gostoto X antibiotika (v g/dm^3) in časom Y njegovega raztapljanja (v sekundah) smo dobili naslednje podatke

X	1140	1092	1127	1175	1162	1105	1160	1143	1170	1105	1150	1145	1120
Y	95	35	15	110	105	20	70	90	100	45	45	55	45

   Izračunaj vzorčni korelacijski koeficient r.

9. 17 dijakov sta ocenjevala učitelj matematike in učitelj slovenščine. Razvrščeni so v abecednem vrstnem redu z rangi $1, 2, ..., 17$.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}
17	12	1	3	8	15	16	2	7	13	5	14	6	10	4	10	10
16	17	4	2	8	15	12	1	10	9	3	12	12	14	5	7	6

S pomočjo Spermanove korelacije rangov na stopnji tveganja $\alpha = 0.01$ preveri, ali sta znanje matematike in znanje slovenščine neodvisni drug od drugega.

3.2 Pogojne porazdelitve in regresija

1. Diskretni slučajni spremenljivki X in Y imata zalogo vrednosti $\{1, 2, 3\}$. Slučajni vektor (X, Y) naj bo porazdeljen s predpisom $p_{j,k} = P((X, Y) = (j, k)) = c(jk + 1)$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

   (a) Poišči porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) in določi konstanto c.

   (b) Doliči robni porazdelitvi. Ali sta X in Y neodvisni?

   (c) Določi pogojno verjetnostno funkcijo komponente X glede na Y, t.j. $X|Y$.

2. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X porazdeljena z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Označimo z A dogodek, da je $|X| \leq 1$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $X|A$?

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto verjetnosti

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x^2y + 3xy^2 & x, y \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Izračunaj $P\left[\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4} \middle| X = \frac{1}{2}\right]$.

4. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto verjetnosti

$$p(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Izračunaj $F_X\left(x \middle| Y = \frac{1}{2}\right)$.

5. Imamo $2n$ strojev, ki so postavljeni v oglišča pravilnega $2n$-kotnika. V vsakem trenutku je enako verjetno, da se pokvari poljuben stroj. Delavec jih oskrbuje po pravilu, da je tisti stroj, ki se prej pokvari, tudi prej na vrsti za popravilo. Pri tem se delavec giblje po obodu $2n$-kotnika po najkrajši poti.

   (a) Kakšno povprečno pot delavec pri tem opravi?

   (b) Ali bi bilo bolj ekonomično, da bi se delavec po vsakem popravilu stroja vrnil v središče $2n$-kotnika?

6. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke $X|Y$.

   (b) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$.

7. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po dvorazsežnem normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, b, \sigma, \tau, \rho)$:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - \frac{2\rho}{\sigma\tau}(x-a)(y-b) + \frac{(y-b)^2}{\tau^2}\right)} .$$

   (a) Določi gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke $X|Y$.

   (b) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$.

8. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; |x-1| + |y-1| \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Izračunaj regresijsko funkcijo $E(X|Y)$ slučajne spremenljivke X glede na Y.

9. Dvodimenzionalna slučajna spremenljivka (X, Y) je mešanega tipa, tako je X porazdeljena diskretno

$$P[X = k] = \frac{C_1}{2^k}, \quad k = 1, 2, ...$$

   in Y zvezno pri pogojni porazdelitvi $Y|X$ z gostoto

$$p(y|X = x) = \begin{cases} C_2 x (1-y)^{x-1} & ; y \in [0, 1] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Izračunaj konstanti C_1 in C_2.

   (b) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Izračunaj tudi robno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

10. Slučajni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen na krožnem izseku s polmerom R in kotom α. Naj slučajna spremenljivka D meri razdaljo točke T od vrha krožnega izseka O. Kakšna je porazdelitev D pri nekem fiksnem kotu $\phi = \varphi$? Izračunaj $E(D|\phi = \varphi)$.

3.3 Aproksimcija binomske porazdelitve

1. Po podatkih je pri nas približno 1% ljudi levičarjev. Izračunaj verjetnost, da izmed 200 ljudi ne bodo več kot trije levičarji.

2. V veliki seriji izdelkov je 2% nekvalitetnih. Iz serije smo naključno izbrali 100 izdelkov. Kakšne so verjetnosti, da je med izvlečenimi izdelki:

   (a) točno 2 nekvalitetna,

   (b) najmanj 2 nekvalitetna,

   (c) največ 5 nekvalitetnih,

   (d) vsaj 2 in ne več kot 5 nekvalitetnih.

3. Križamo pšenico sort A in B. Verjetnost, da je križanec sorte A je $\frac{1}{4}$. Kakšna je verjetnost, da je med 4800 semeni križancev vsaj 1230 semen sorte A.

4. Skupina 400 strelcev strelja v isto tarčo. Verjetnost posameznega zadetka je 0.8. Kolikšne so verjetnosti, da je v tarči

   (a) vsaj 120 zadetkov,

   (b) največ 150 zadetkov,

   (c) med 310 in 330 zadetkov.

3.4 Karakteristična funkcija

1. Naj bo slučajna spremenljivka X enakomerno porazdeljena na intervalu $[-a, a]$. Izračunaj njeno karakteristično funkcijo f_X?

2. Izračunaj karakteristično funkcijo Cauchyjeve porazdelitve, katere gostota je $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

3. Dokaži: če je gostota slučajne spremenljivke X soda funkcija, potem je karakteristična funkcija realna.

4. Naj bo $f_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke X.

   (a) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X.

   (b) Izračunaj gostoto slučajne spremenljivke X.

3.5 Markovske verige

1. Imamo mrežo, ki jo sestavljajo oglišča kvadrat in diagonala AC. Delec se vsako sekundo z enako verjetnostjo premakne iz enega oglišča do sosednjega. Za vsako vozlišče mreže izračunaj verjetnost dogodka, da se delec nahaja tam po dveh sekundah, če je na začetku z enako verjetnostjo nahajal v oglišču A ali B.

2. Homogena markovska veriga je na začetku z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ v stanju E_1. Iz tega stanja drugo stanje ni dosegljivo. Iz stanja E_2 v stanje E_1 pa veriga preide z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. S kakšnima verjetnostima je markovska veriga po n prehodih v stanju E_1 in E_2? Klasificiraj stanji E_1 in E_2.

3. Ponavljamo poskus v katerem ima dogodek A verjetnost p. Temu zaporedju priredimo markovsko verigo s predpisom: veriga je v trenutku t (v n-ti ponovitvi poskusa) v stanju

   E_1, če se je v $n-1$ in n-tem poskusu zgodil dogodek A;

   E_2, če se je v $n-1$-tem poskusu zgodil dogodek $\overline{A}$ in v n-tem poskusu dogodek A;

   E_3, če se je v $n-1$-tem poskusu zgodil dogodek A in v n-tem poskusu dogodek $\overline{A}$;

   E_4, če se je v $n-1$ in n-tem poskusu zgodil dogodek $\overline{A}$;

   (a) Za to markovsko verigo zapiši matriko prehoda P in izračunaj $P^2, P^3, ..., P^n$.

   (b) Klasificiraj stanja E_1, E_2, E_3, E_4 in poišči stacionarno porazdelitev, če le-ta obstaja.

4. Delec se giblje po mreži trikotnika ΔABC. Na vsakem koraku se delec iz danega oglišča z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$ premakne v pozitivni smeri in z verjetnostjo $q = 1 - p$ v negativni smeri orientacije trikotnika v sosednje oglišče.

   (a) Gibanje delca opiši z markovsko verigo.

   (b) Za posamezno stanje markovske verige izračunaj $v_i(n)$-verjetnost, da se delec po n korakih prvič vrne v začetno lego.

   (c) Poišči stacionarno porazdelitev in za vsako stanje izračunaj povprečen čas vrnitve.

5. Vnet obiskovalec Štuka in Trusta gre vsak večer na Štuk ali v Trust, vendar v Trust ne gre dva večera zaporedoma. Če gre na Štuk je enako verjetno, da gre naslednji večer na Štuk kot v Trust.

   (a) Obiskovanje študenta predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti).

   (b) Zvečer je bil študent na Štuku. Kakšna je verjetnost, da bo po n večerih spet na Štuku?

(c) Klasificiraj obe stanji markovske verige. Po koliko dneh se študent v povprečju spet vrne v Trust.