Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 31.01.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V prvi posodi so tri rdeče in štiri modre kroglice, v drugi pa dve rdeči in ena modra kroglica. Najprej vržemo običajno igralno kocko. Če pade liho število pik, iz prve v drugo posodo prestavimo eno kroglico, v nasprotnem primeru pa dve kroglici. Nato iz druge posode izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili dve modri kroglici, če smo na koncu izvlekli eno rdečo in eno modro kroglico?

2. Božiček je izgubil seznam daril za štiri otroke. Ker ne ve, komu predati katero darilo, darila razdeli naključno. Slučajna spremenljivka X naj pomeni število daril na pravem mestu. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo. Porazdelitveno funkcijo tudi nariši.

3. Določi gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = X + |Y|$, če je gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) enaka

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1-xy}{2} & ; \quad |x| + |y| \leq 1, \\ 0 & ; \quad \text{sicer.} \end{cases}$$

   Preveri tudi, da je $p(x, y)$ res gostota verjetnosti.

4. V tedenskem poročilu so reševalci zabeležili naslednje število nujnih primerov:

PON	TOR	SRE	ČET	PET	SOB	NED
22	25	26	31	39	41	19

   Ali lahko s temi podatki na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$, oziroma $\alpha = 0,01$ zavrnemo hipotezo, da je število nezgod neodvisno od dneva?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 31.01.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. Običajno igralno kocko vržemo 3x. Kolikšna je verjetnost, da bo:
   (a) vsakič padlo večje število pik,
   (b) pri enem izmed metov padlo toliko pik, kot je pri ostalih dveh skupaj.

2. Božiček je izgubil seznam daril za štiri otroke. Ker ne ve, komu predati katero darilo, darila razdeli naključno. Slučajna spremenljivka X naj pomeni število daril na pravem mestu. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo. Porazdelitveno funkcijo tudi nariši.

3. Naenkrat vržemo 3 poštene igralne kocke. Slučajna spremenljivka X naj bo minimalno število pik, slučajna spremenljivka Y pa vsota vseh pik, ki so padle pri metu. Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja (X, Y) in določi robni porazdelitvi. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Odgovor utemelji.

4. Naključno smo izbrali 20 ljudi in jih povprašali o starosti v času opravljanja vozniškega izpita . Rezultate smo razdelili v dve skupini glede na moške in ženske.

$$\begin{aligned} \text{Moški}: &\quad 23, 26, 32, 18, 19, 45, 33, 27. \\ \text{Ženske}: &\quad 20, 51, 19, 18, 19, 26, 25, 21, 18, 30, 21, 32. \end{aligned}$$

   Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ preveri hipotezo, ki pravi, da sta standardna odklona od povprečja starosti pri opravljanju vozniškega izpita za moške in ženske enaka. **Namig:** najprej izračunaj vzorčno povprečje $\overline{X}$ in vzorčni standardni odklon S.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 28.02.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V treh posodah so kroglice. V prvi 3 bele in 6 črnih, v drugi 4 bele in 4 črne ter v tretji 6 belih in 2 črni.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da iz naključno izbrane posode izvlečemo belo kroglico?

   (b) Iz naključno izbrane posode smo izvlekli 2 črni kroglici. Kolikšna je verjetnost, da smo kroglici izvlekli iz druge posode?

2. Na pravokotniku $[0,2] \times [0,3]$ izberemo točko (x,y), $x, y \in \mathbb{R}$. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali točko, ki ima prvo koordinato večjo? Kolikšna je ta verjetnost, če vemo, da mora točka od izhodišča $(0,0)$ biti oddaljena za manj kot 2 enoti? **Pomoč:** ploščina kroga je πr^2.

3. Dana so števila $1,2,3,4,5,6$. Naključno hkrati izberemo dve števili. Največje število izmed izbranih števil je slučajna spremenljivka X.

   (a) Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$ in disperzijo $D(X)$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $N(a,\sigma)$, dajo naslednje vrednosti:
$$97, 95, 104, 99, 95, 97, 91, 95\,.$$

   (a) Testiraj hipotezo, ki pravi, da je povprečje $a = 100$. Stopnja značilnosti α je $0,05$.

   (b) Za to količino porazdeljeno normalno $N(a,\sigma)$ smo na vzorcu $n = 400$ izračunali povprečje $\overline{X} = 102$ in standardni odklon $S = 3,16$. Testiraj hipotezo, ki pravi, da je povprečje $a = 100$. Stopnja značilnosti α je $0,01$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11.06.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V predalu so bili štirje čokoladni, pet sadnih in trije zeliščni bomboni. Janko je ponoči postal lačen in si je zato iz predala vzel dva izmed bombonov. Ker pa je bila tema, ni videl kakšna je izbral. Zjutraj si je še njegova sestrica Metka zaželela nekaj sladkega in je zato in predala naključno vzela enega od preostalih bombonov. Kolikšna je verjetnost, da si je izbrala čokoladnega? Kolikšna je tedaj verjetnost, da je Janko ponoči pojedel enega čokoladnega in enega sadnega?

2. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je
$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}\,,$$
za vsak $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj verjetnost $P(0 \leq X \leq 1)$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = e^X$?

3. Iz kraja A v kraj B vodi 52 poti, iz kraja B v kraj C pa 18 poti. Direktnih poti iz kraja A v kraj C ni. Verjetnost, da je pot prehodna je $\frac{1}{3}$.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da ni prehodne poti od kraja A do kraj C.
   (b) Aproksimativno oceni verjetnost, da je iz kraja A v kraj B največ 20 prehodnih poti.

4. Na populaciji smo preverjali neodvisnost jemanja drog in rase. Pri tem smo zbrali naslednje podatke:

Rasa \ Droge	NE	DA	Skupaj
Bela	115	38	153
Črna	98	65	163
Drugo	80	34	114
Skupaj	293	137	430

Ali lahko na stopnji značilnsti $\alpha = 0,05$ hipotezo zavrnemo? Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ preveri tudi hipotezo, da je statistična spremenljivka *Rasa* porazdeljena enakomerno.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11.06.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V predalu so bili štirje čokoladni, pet sadnih in trije zeliščni bomboni. Janko je ponoči postal lačen in si je zato iz predala vzel dva izmed bombonov. Ker pa je bila tema, ni videl kakšna je izbral. Zjutraj si je še njegova sestrica Metka zaželela nekaj sladkega in je zato in predala naključno vzela enega od preostalih bombonov. Kolikšna je verjetnost, da si je izbrala čokoladnega? Kolikšna je tedaj verjetnost, da je Janko ponoči pojedel enega čokoladnega in enega sadnega?

2. Diskretna slučajna spremenljivka X je podana z verjetnostno shemo
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & 3a & 2b & a+\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
in matematičnim upanje $E(X) = \frac{7}{8}$. Določi realni števili a in b.

3. Iz kraja A v kraj B vodi 52 poti. Verjetnost, da je pot prehodna je $\frac{1}{3}$.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da ni prehodne poti iz kraja A v kraj B.
   (b) Aproksimativno oceni verjetnost, da je iz kraja A v kraj B vsaj 20 prehodnih poti.

4. Anketirali smo 68 moških in 42 žensk. Ugotovili smo, da je od anketiranih oseb 28 moških kadilcev in 20 ženskih kadilcev. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ testiraj hipotezo H_0, da je delež moških in ženskih kadilcev enak?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24.06.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. Naj bo X_i dogodek, da na kocki pade i pik. Za kocko naj velja pogoj $P(X_{i+1}) = 2P(X_i)$, za $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   (a) Kolikšne so verjetnosti $P(X_i)$, za $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
   (b) Naj veljajo verjetnosti iz točke (a). Če na kocki vržemo i pik, potem naključno izberemo eno izmed števil od 1 do i (vključno) (primer: če na kocki vržemo 4 pike, potem naključno izberemo eno imed števil od 1 do 4). Kolikšna je verjetnost, da izberemo liho število?

2. Na krožnici s središčem S in polmerom r leži točka A. Na isti krožnici naključno izberemo dodatno točko B. Kolikšna je verjetnost, da bo trikotnik ΔABS imel največ polovico ploščine največjega tako nastalega trikotnika. **Pomoč:** $p_\Delta = \frac{ab \sin\gamma}{2}$.

3. Na odpadu imamo dva rdeča avtomobila označena s števili 1 in 2, tri zelene avtomobile označene s števili 1, 2 in 3 ter štiri modre avtomobile označene s števili 1, 2, 3 in 4. Slučajni vektor (X, Y) pomeni barvo in številko na slepo izbranega avtomobila. Določi porazdelitveni zakon slučajnega vektorja (X, Y) in verjetnost $P(Y = n)$, kjer je n številka avtomobila, pri pogoju, da je avtomobil rdeč.

4. Domnevamo, da je število zaporedoma doseženih košev nekega košarkarja porazdeljeno geometrijsko s parametrom $p = \frac{1}{2}$. Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ hipotezo o geometrijski porazdelitvi glede na zbrane podatke

Št. zap. košev	1	2	3	4	5	6	več
Frekvenca	405	202	107	47	19	15	5

   zavrnemo?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24.06.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. (a) Trije konji tekmujejo v dirki. Verjetnost, da zmaga konj A, je dvakrat večja od verjetnosti, da zmaga konj B. Verjetnost, da zmaga konj B, je dvakrat večja od verjetnosti, da zmaga konj C. Kolikšna je verjetnost, da zmaga posamezni konj?

   (b) Verjetnost, da pri metu kovanca pade grb je $\frac{2}{3}$. Če vržemo grb, naključno izberemo eno izmed števil od 1 do 8 (vključno), v nasprotnem primeru naključno izberemo eno izmed števil od 1 do 5 (vključno). Kolikšna je verjetnost, da izberemo liho število?

2. Na krožnici s središčem S in polmerom r leži točka A. Na isti krožnici naključno izberemo dodatno točko B. Kolikšna je verjetnost, da bo trikotnik ΔABS imel ploščino manjšo od $\frac{r^2}{4}$? **Pomoč:** $p_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

3. V letu 2008 so v bolnišnici opravili 400 operacij. Verjetnost, da pri operaciji pride do dodatnih zapletov je $\frac{1}{4}$.

   (a) Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X, ki predstavlja število dodatnih zapletov pri operaciji.

   (b) Kolikšna je ocena verjetnosti, da v bolnišnici ne bodo imeli več kot 130 operacij z dodatnimi zapleti?

4. Anketirali smo 62 oseb in ugotovili, da jih ima 48 opravljen vozniški izpit. Na stopnji zaupanja $0,95$ poišči interval zaupanja za delež oseb z vozniškim izpitom. Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$ zavrnemo hipotezo, da je delež oseb z opravljenim vozniškim izpitom enak $0,7$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 27.08.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V treh posodah so kroglice, v prvi 5 belih in 5 rdečih, v drugi 4 bele in 8 rdečih ter v tretji 9 belih in 3 rdeče.
   (a) Kaj je verjetnejše, da se iz druge posode izvleče bela kroglica ali da se iz naključno izbrane posode izvleče bela kroglica?
   (b) Iz naključno izbrane posode smo izvlekli dve rdeči kroglici. Kolikšna je verjetnost, da je bila izbrana prva posoda?

2. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F(x) = \begin{cases} \frac{bx+1}{x+2} & ; \quad x \geq -1 \\ a & ; \quad x < -1 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F res porazdelitvena funkcija.
   (b) Izračunaj $P(-3 \leq X \leq 2)$ in gostoto porazdelitve naključne spremenljivke X.

3. V morju imamo i črnih podmornic z i torpedi ($i \in \{2,3\}$), j rjavih podmornic z j torpedi ($j \in \{2,3,4\}$) in k sivih podmornic s k torpedi ($k \in \{2,3,4,5\}$). Slučajni vektor (X,Y) pomeni barvo in število torpedov poljubne podmornice. Določi porazdelitveni zakon za (X,Y) in verjetnost $P(Y=n)$ pri pogoju, da je podmornica črna, za $n \in \{2,3,4,5\}$

4. Pri križanju dveh vrst orhidej so hipotetične verjetnosti, da bomo dobili rumeno, belo, rdečo in modro orhidejo po vrsti $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$. V 100 poskusih križanja smo dobili naslednje rezultate:

rumena	bela	rdeča	modra
35	47	15	3

   Ali se ti rezultati na osnovi tveganja $\alpha = 0,05$ statistično značilno razlikujejo od teoretično pričakovanih?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 27.08.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. V treh posodah so kroglice, v prvi 5 belih in 5 rdečih, v drugi 4 bele in 8 rdečih ter v tretji 9 belih in 3 rdeče.
   (a) Kaj je verjetnejše, da se iz druge posode izvleče bela kroglica ali da se iz naključno izbrane posode izvleče bela kroglica?
   (b) Iz naključno izbrane posode smo izvlekli belo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je bila izbrana prva posoda?

2. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F(x) = \begin{cases} \frac{bx+1}{x+2} & ; \quad x \geq -1 \\ a & ; \quad x < -1 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F res porazdelitvena funkcija.
   (b) Izračunaj $P(-3 \leq X \leq 2)$ in gostoto naključne spremenljivke X.

3. V morju imamo i črnih podmornic z i torpedi ($i \in \{1, 2\}$), j rjavih podmornic z j torpedi ($j \in \{1, 2, 3\}$) in k sivih podmornic s k torpedi ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$). Slučajni vektor (X, Y) pomeni barvo in število torpedov poljubne podmornice. Določi porazdelitveni zakon za (X, Y). Ali sta spremenljivki X in Y neodvisni?

4. V letu 2008 smo pri merjenju neke lastnosti na vzorcu velikosti 46 dobili standardni odklon $S_1 = 3,4$.
   (a) Na stopnji zaupanja $0,95$ določi interval zaupanja za populacijski standardni odklon σ.
   (b) Po temeljiti analizi podatkov smo zaradi napak pri meritvah iz vzorca izločili 17 primerkov in na preostanku dobili vzorčni standardni odklon $S_2 = 2,9$. Domnevali smo, da je standardni odklon na populaciji enak S_1. Ali lahko domnevo s pomočjo manjšega vzorca na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ zavrnemo?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10.09.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. Na daljici dolžine 1 naključno izberemo dve točki. Označimo naslednja dogodka:
   A: razdalja med izbranima točkama je manjša od $\frac{1}{2}$,
   B: izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice.

   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$.

2. V škatli je 6 belih in 10 črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšne barve je bila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili beli. Kolikšna je verjetnost, da je iz škatle padla bela oz. črna kroglica?

3. Najprej vržemo pošteno igralno kocko nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Število padlih pik naj bo vrednost slučajne spremenljivke X, število padlih grbov pa vrednost slučajne spremenljivke Y.

   (a) Kako je porazdeljen diskretni slučajni vektor (X, Y)? Določi robni porazdelitvi X in Y.

   (b) Kakšna je verjetnost, da padejo vsaj 3 grbi, če so padle vsaj 4 pike?

4. V letu 2008 smo pri merjenju neke lastnosti na vzorcu velikosti 46 dobili standardni odklon $S_1 = 3,4$.

   (a) Na stopnji zaupanja $0,95$ določi interval zaupanja za populacijski standardni odklon σ.

   (b) Po temeljiti analizi podatkov smo zaradi napak pri meritvah iz vzorca izločili 17 primerkov in na preostanku dobili vzorčni standardni odklon $S_2 = 2,9$. Domnevali smo, da je standardni odklon na populaciji enak S_1. Ali lahko domnevo s pomočjo manjšega vzorca na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ zavrnemo?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10.09.2008

Ime in priimek: **V**pisna številka:

1. Na daljici dolžine 1 naključno izberemo dve točki. Označimo naslednja dogodka:
   A: razdalja med izbranima točkama je manjša od $\frac{1}{2}$,
   B: izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice.
   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$.

2. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ k(x-1)^3 & ; \quad 1 < x \leq 3 \\ 1 & ; \quad x > 3 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanto k in gostoto porazdelitve $p(x)$.
   (b) Kolikšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti z intervala $(1,2)$?

3. Porazdelitev slučajnega vektorja (X,Y) je podana s tabelo:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X=1$	$\frac{1}{20}$	?	?
$X=2$	?	?	?

   Dopolni tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Zapiši tudi njuni porazdelitvi.

4. Življenska doba izdelka X je porazdeljena po normalnem zakonu $N(\mu, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ izdelkov izračunal vzorčno povprečje $\overline{X} = 1060$ ur in $\sum \left(X - \overline{X}\right)^2 = 312500$ ur^2. Ali lahko na osnovi teh podatkov pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ zavrnemo hipotezo, da je $E(X) = 1000$ ur?

Naloge so enakovredne.