Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25.4.2001

1. Dane so premice

   $$q : y+1 = \frac{z-1}{2}\,,\ x=2\,,\quad r : \frac{x+1}{2} = y+3\,,\ z=0\,,\quad p : x-2 = \frac{y+4}{-2} = -z-2$$

   Določi enačbo krogle, ki ima središče na premici p in se dotika premic q in r.

2. Naj bo a realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

   $$\begin{vmatrix} -a & 2a & & & & \\ & -a & 2a & & & \\ & & -a & 2a & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a & 2a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Za matriko $A \in M_3(\mathbb{R})$ označimo z A^S matriko, ki je prezrcaljena čez stransko diagonalo. $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ naj bosta podmnožici $M_3(\mathbb{R})$ oblike

   $$\mathcal{S} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A = A^S\right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{T} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^T = A^S\right\}.$$

   Dokaži, da sta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podprostora vektorskega prostora $M_3(\mathbb{R})$, določi tudi baze prostorov $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Koliko je dimenzija prostora $\mathcal{S} + \mathcal{T}$?

4. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava A zrcali čez premico $p : x = y = z$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi A in A^*, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave A^*.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 8.6.2001

1. Premica p naj bo presek ravnin $x+y+z=0$ in $x-y+2=0$. Določi premico q, ki gre skozi točko $T\,(2,2,-1)$ in seka premico p pod pravim kotom.

2. Ugotovi za katere $x \in \mathbb{R}$ matrika $A\,(x)$ ni obrnljiva, če je
$$A\,(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ x & 0 & 3 & 1 \\ x^2 & 1 & 5 & 5 \\ x^3 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$
Izračunaj še $A^{-1}\,(0)$.

3. Naj bo V končno razsežen vektorski prostor s skalarnim produktom, $\dim V \geq 2$ in $w \in V$. Na V definiramo endomorfizem $\mathcal{A} : V \to V$ s predpisom
$$\mathcal{A}v = \langle v|w\rangle\, w\,.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Določi $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Koliko je njuna dimenzija?
   (c) Določi tak pogoj na vektor w, da bo $\mathcal{A}$ projektor.

4. Z ortogonalnimi transformacijami prevedi realno kvadratno formo $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q\,(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$ v obliko s samimi kvadratnimi členi. Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q\,(x,y,z) = 1$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 22.6.2001

1. Naj bosta U in V naslednji podmnožici vektorskega prostora polinomov stopnje največ n :

$$U = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p(1) = p'(0) = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p(0) = p'(1) = 0\}$$

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora.

   (b) V primeru $n = 5$ poišči primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

2. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $2n \times 2n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle:

$$\begin{vmatrix}
1 & & & & 1 & & & & \\
 & 2 & & & 2 & & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & n-1 & n-1 & & & & \\
1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\
 & & & & n+1 & n+1 & & & \\
 & & & & \vdots & & \ddots & & \\
 & & & & 2n-1 & & & 2n-1 & \\
 & & & & 2n & & & & 2n
\end{vmatrix}.$$

3. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kompozitum pravokotne projekcije na ravnino $x+y+z=0$ in vrtenja v tej ravnini okrog izhodišča za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivni smeri. Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. Naj bo U vektorski podprostor $\mathbb{R}_4[X]$ realnih polinomov stopnje največ 4, ki vsebuje vse polinome, za katere velja $p(1) = 0$ in $p(x) = p(-x)$. Naj bo $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}_4[X]$. Poišči ortonormirano bazo podprostorov U in $U^{\perp}$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 24.8.2001

1. Glede na realno število a poišči rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x - ay - z - u &= 0\,, \\ x - z - u &= 0\,, \\ \left(a^2 - a\right) z + (1-a)\, u &= a - 1\,, \\ -2x + ay + z + (a+1)\, u &= a^2 - a\,. \end{aligned}$$

2. Naj bosta U in V naslednji podmnožici vektorskega prostora realnih $n \times n$ matrik:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ A \in M_n(\mathbb{R})\, | A + A^T \text{ je diagonalna matrika} \right\}\,, \\ V &= \left\{ A \in M_n(\mathbb{R})\, | A - A^T \text{ je diagonalna matrika} \right\}\,. \end{aligned}$$

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) V primeru $n = 3$ poišči baze vektorskih prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Poišči Jordanovo kanonično obliko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Določi tudi karakteristični in minimalni polinom matrike A.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ realnih polinomov stopnje največ dva za $i = 1, 2, 3$ definiramo linearne funkcionale

$$F_i(p) = \int_0^i p(x)\, dx\,.$$

   (a) Dokaži, da je $\{F_1, F_2, F_3\}$ baza vektorskega prostora $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu F_1 glede na skalarni produkt

$$\langle p | q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 7.9.2001

1. Naj bodo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ paroma pravokotni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami $|\overrightarrow{a}| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$ in $|\overrightarrow{c}| = 3$. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji
$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\,.$$

2. Naj bo a realno število in
$$A = \left|\begin{array}{cccc} 1-a & a & 2-a & 2 \\ -a & 1+a & 3-a & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|.$$
Za katera realna števila a lahko matriko A diagonaliziramo? V tem primeru določi tudi ustrezno diagonalno in prehodno matriko. Odgovor utemelji!

3. Za realno število a tvorimo matriko
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX - XA$. Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava. Poišči matriko, ki preslikavi $\mathcal{T}$ pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Določi tudi razsežnost jedra preslikave $\mathcal{T}$ v odvisnosti od prametra a.

4. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom naj bo $\mathcal{A}$ projekcija na ravnino $\pi : 2x - y + z = 0$ v smeri premice $p : x = y = 0$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$.

Naloge so enakovredne.