Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 2. 4. 2002

1. Reši matrično enačbo $A^2X = AC - 2AX$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
in izračunaj X^{2n}, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2. Naj bo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vektorski prostor realnih zveznih funkcij. Preslikava $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{F}(f)(x) = a(f(x) + f(-x))$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ neničelna konstanta.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{F}$ linearna preslikava.
   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{F}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{F}$.
   (c) Določi konstanto a tako, da bo $\mathcal{F}$ projektor.

3. Naj bosta p in q premici v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki ju določata enačbi:
$$p : x = y = z \quad \text{in} \quad q : 3x = -6y = 2z.$$
Označimo z Σ ravnino, ki vsebuje premici p in q.
   (a) Zapiši matriko A oz. matriko B, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada zrcaljenju čez ravnino Σ oz. premico p.
   (b) Za katere točke $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ velja $A\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{x}$? Kaj geometrijsko predstavlja ta množica?

4. Za katero realno število a je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{bmatrix}$$
podobna diagonalni matriki? V tem primeru določi tudi ustrezno diagonalno in prehodno matriko.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 4. 6. 2002

1. Na vsako od stranskih ploskev tristrane piramide, določene z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$, postavi pravokotni vektor, ki ima smer iz telesa in ima dolžino enako ploščini ustrezne stranske ploskve. Izračunaj vsoto teh vektorjev in absolutno vrednost mešanega produkta treh od teh vektorjev, izrazi jo z volumnom tristrane piramide.

2. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Naj bosta

$$U = \{X \in M_n(\mathbb{R})\,|AX = XA\} \quad \text{in} \quad V = \{X \in M_n(\mathbb{R})\,|AX = -XA\}$$

množici matrik, ki komutirajo oz. antikomutirajo z matriko A.

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_n(\mathbb{R})$ in določi podprostor $U \cap V$. Kakšnemu pogoju mora zadoščati matrika A, da bo vsota $U + V$ direktna?

   (b) Za matriko $A = E_{11} + E_{13} + E_{22} \in M_3(\mathbb{R})$ določi baze in dimenzijo prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Dana je matrika $A \in M_5(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

4. V evklidskem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ sta podana hiperravnina in premica

$$\pi = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\right\}, \ p = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = -z = 2t\right\}.$$

Naj bo $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ projektor na premico $p = \operatorname{Im} \mathcal{P}$ vzdolž hiperravnine $\pi = \operatorname{Ker} \mathcal{P}$.

   (a) Določi bazi danih podprostorov.

   (b) Poišči matriki, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ pripadata preslikavama $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}^*$.

   (c) Ali je $\mathcal{P}^*$ projektor? Če je, kam in vzdolž česa projecira?

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 27. 8. 2002

1. Premica p je vzporedna z ravninama $\pi : x-3y-3z=6$ in $\Sigma : x+3z=1$ ter gre skozi težišče trikotnika ΔABC, kjer so $A\,(2,1,-1)$, $B\,(1,-3,1)$ in $C\,(0,2,-3)$. Zapiši enačbo premice p in poišči koordinate pravokotne projekcije točke B na ravnino Π, ki jo določata premica p in točka A.

2. Naj bo V vektorski prostor in $\mathcal{A} : V \to V$ endomorfizem, za katerega velja $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$. Dokaži, da je potem $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^n = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Obravnavaj najprej primer $n = 2$.

3. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.
   (b) Zapiši Jordanovo kanonično obliko matrike A in določi minimalni polinom matrike A.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_5\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 5 sta podana linearna funkcionala
$$F\,(p) = \int_{-1}^{1} xp\,(x)\,dx \quad \text{in} \quad G\,(p) = \int_{-1}^{1} x^2 p\,(x)\,dx.$$
   (a) Določi razsežnost in zapiši primer baze vektorskega podprostora $\operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Ker} G$.
   (b) Dopolni zgornjo bazo do baze celega prostora $\mathbb{R}_5\,[X]$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 9. 2002

1. V trapezu $ABCD$ je krak AD pravokoten na osnovnico in diagonali sta pravokotni ena na drugo.
   (a) Izračunaj razmerje $|DC| : |AB|$.
   (b) Naj bo E razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AC in BE. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ ter določi vrednost razmerja $|AS| : |SC|$.

2. Ugotovi za katere vrednosti realnih parametrov je sistem:
$$\begin{aligned} x + y + 2z - t &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ 3x + (a+3)\,y + 6z + (a-3)\,t &= 1 \\ x + 3y + 4z + (a+1)\,t &= b \end{aligned}$$
   protisloven, enolično rešljiv in nedoločen. Rešitve tudi poišči!

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$ realnih polinomov stopnje največ $n \in \mathbb{N}$ je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = (x+1)\,p'(x)$$
   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator.
   (b) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_n[X]$ pripada operatorju $\mathcal{A}$.
   (c) Določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?
   (d) Ali obstaja baza, v kateri operatorju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Če obstaja, zapiši to bazo in pripadajočo diagonalno matriko.

4. V $\mathbb{R}^3$ vpeljemo skalarni produkt tako, da je množica $\{(1,0,0), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ ortonormirana baza. Poišči kot med vektorjema $u_1 = (0,1,0)$ in $u_2 = (0,0,1)$ in pravokotno projekcijo vektorja u_1 na vektor $u_3 = (1,0,1)$.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 25 + 30 + 20$.