Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.1.1999

1. V žari imamo 4 bele in 3 rdeče kroglice. Naključno izberemo kroglico in je ne vrnemo. Postopek ponavljamo, dokler ne izberemo rdeče kroglice. Označimo s T število izvlečenih kroglic vključno z zadnjo rdečo kroglico. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T? Izračunaj tudi $E(T)$.

2. Na daljici $\overline{AB}$ naključno izberemo dve točki. Označimo naslednje dogodke:

   A = vsota oddaljenosti točk od bližnjega krajišča je manjša od medsebojne razdalje;

   B = izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice $\overline{AB}$.

   Kakšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$ in $P(A|B)$?

3. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a(-x^2+2x); & x \in [0,2] \\ a(-x^2-2x); & x \in [-2,0] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto a.

   (b) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$. (Pomoč: upoštevaj simetričnost.)

4. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 9.5$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 15$. S temi podatki testiramo hipotezo $H_0(a = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca:

   (a) $n = 16$,

   (b) $n = 30$?

(Pomoč: uporabi statistiko $T = \frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n}$.)

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.1.1999

1. Dogodek A ima v poskusu X verjetnost p $(0 < p < 1)$. Poskus ponavljamo tako dolgo, da se dogodek A zgodi $r-$krat. Izračunajte kolikokrat je v potrebno v povprečju ponoviti poskus X. (Pomoč: pokaži, da je $G(t) = (pt)^r / (1-qt)^{-r}$ rodovna funkcija te slučajne spremenljivke.)

2. Naj bo realno število $a > 0$ in X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}\,.$$
   (a) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$. (Pomoč: upoštevaj simetričnost in Eulerjevo funkcijo Γ.)
   (b) Kako je porazdeljena zvezna slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

3. Zvezni slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto
$$p(x, y) = \frac{c}{e^{|x|+|y|}}\,.$$
   (a) Izračunaj konstanto c.
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. Pri atletih so preskušali vpliv dveh "nedovoljenih" poživil za izboljšavo fizične pripravljenosti pri teku na 400 m. V tabeli so podane izboljšave X (v sekundah) zaradi prvega poživila in Y zaradi drugega poživila. Ali lahko s 5% tveganjem zavrnemo domnevo, da je prvo poživilo enako učinkovito kot drugo?

atlet	1	2	3	4	5	6	7
X	1.3	0.8	1.1	2.3	-0.5	1.5	0.3
Y	-1.2	0.3	0.1	1.2	0.3	$-.5$	1.7

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Matematika in računalništvo z matematiko

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.1.1999

1. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se delec z enako verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo stran bodisi za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leqslant m$ enot?

2. Naj bo realno število $a > 0$ in X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}.$$
   (a) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$. (Pomoč: upoštevaj simetričnost in Eulerjevo funkcijo Γ.)
   (b) Kako je porazdeljena zvezna slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

3. Naj bo $n = 2k + 1$ enakih strojev razporejenih v pravilni $n-$kotnik. Delavec jih oskrbuje po vrstnem redu - tisti, ki se prej pokvari, je tudi oskrbljen najprej; pri tem delavec ubere najkrajšo pot po obodu $n-$kotnika od stroja, ki ga je ravnokar oskrbel, do pokvarjenega stroja. Izračunaj povprečno dolžino opravljene poti. Ali bi bilo bolj ekonomično, če bi se delavec takoj po oskrbi stroja vrnil v središče $n-$kotnika?

4. V nekem jezeru je N rib. Da bi približno ocenili njihovo število, so vanj spustili 100 označenih rib. Čez nekaj časa so ulovili 400 rib in med njimi je bilo 5 označenih rib. Poišči čimožji interval $[a, b]$, da bomo z verjetnostjo vsaj 95% trdili, da je v jezeru med a in b rib. (Pomoč: uporabi Laplaceov limitni izrek
$$P\left(\alpha \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \beta\right) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$
Najožji interval dobiš, če je $\alpha = -\beta$.)

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 25.2.1999

1. Na intervalu $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila. Kakšna je verjetnost, da drugo število leži med prvim in tretjim?

2. Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo
$$G_X(t) = \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}$$
   (a) Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X.
   (b) Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X?

3. Naključno izberimo dve različni oglišči pravilnega 6-kotnika s stranico a. Vrednost slučajne spremenljivke X je dolžina najkrajše poti po obodu 6-kotnika med izbranima ogliščema. Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X? Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$!

4. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{|x|+1} & ; x \in [-3,3] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
   (a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ ter določi konstanto a in izračunaj $E(X)$.
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 25.2.1999

1. Naključno izberemo tri daljice, ki imajo dolžino manjšo od l. Kakšna je verjetnost, da z njimi sestavimo trikotnik?

2. Dan je pravilni $2n-$kotnik s stranico a. Na slepo izberemo 2 različni oglišči. Vrednost slučajne spremenljivke X je najkrajša razdalja po obodu $2n-$kotnika med izbranima točkama. Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X? Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$!

3. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto
$$p(x) = a\,|x|^3\, e^{-x^2}\,.$$
   (a) Izračunaj konstanto a in $k-$ti začetni moment spremenljivke X.
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$?

4. Pri tovarniški kontroli so naključno izbrali 1000 izdelkov in pri njih ugotovili število napak X. Dobljeni rezultati so predstavljeni v tabeli

X	0	1	2	3	4	5	več
n_k	220	330	261	121	55	13	0
p_k	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0.004

.

   Sumili so, da je število napak porazdeljeno po Poissonovem zakonu, to je $p_k = \frac{1}{k!}a^k e^{-a}$, kjer je $a > 0$.
   (a) Z ustrezno cenilko določi a, za katerega so že izračunane teoretične verjetnosti posameznih razredov. (Pomoč: pri Poissonovi porazdelitvi je $E(X) = a$.)
   (b) Ali so dobljeni rezultati, na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$, v nasprotju z domnevo, da je spremenljivka X porazdeljena po Poissonovem zakonu?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Matematika in računalništvo z matematiko

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 25.2.1999

1. Na krogu s polmerom R naključno izberemo točke A, B, C. Kakšna je verjetnost, da je trikotnik ABC ostrokoten?

2. Dan je pravilni $2n-$kotnik s stranico a. Na slepo izberemo 2 različni oglišči $2n-$kotnika. Vrednost slučajne spremenljivke X je najkrajša razdalja po obodu $2n-$kotnika med izbranima točkama. Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X? Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$!

3. Naj bo
$$f_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X.
   (a) Izračunaj $k-$ti začetni moment slučajne spremenljivke X.
   (b) Določi gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X. (Pomoč: kompleksni integral; residum.)

4. V ribniku živi žaba, ki jo lahko najdemo v vodi, v čolnu, na kopnem ali na lokvanju. Če je žaba v čolnu, bo skočila z enako verjetnostjo bodisi na kopno bodisi na lokvanj. Iz lokvanja skoči žaba bodisi v čoln bodisi v vodo. Iz vode z enako verjetnostjo skoči na lokvanj ali na kopno ali v čoln. Če je žaba na kopnem, bo skočila v čoln ali v vodo. S kakšno verjetnostjo se žaba po dveh skokih nahaja v posameznem stanju, če je na začetku enako verjetno, da je v čolnu ali na lokvanju.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3.6.1999

1. Imamo kovanca A in B z neznano verjetnostjo, da pade grb p oziroma p'.

   (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{1}{12}$. Izračunaj verjetnosti p in p'.

   (b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa A in 2 kovanca tipa B. Izračunaj verjetnost, da pade vsaj en grb in vsaj ena cifra.

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno izberemo dve števili. Označimo naslednja dogodka:

   $A-$ absolutna razlika izbranih števil je manjša od $\frac{1}{2}$;

   $B-$ vsota izbranih števil leži med $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{2}$.

   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$ in $P(A|B)$.

3. Diskretna slučajna spremenljivka X ima verjetnostno funkcijo

$$p_k = P[X = k] = \frac{C}{3^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

   (a) Določi konstanto C.

   (b) Zapiši rodovno funkcijo in izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

   (c) Določi verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke $Y = -2\cos\frac{\pi X}{2}$.

4. Izmed prvih 800 cifer števila π so se cifre $0, 1, 2, ..., 9$ pojavile po vrsti

   74, 92, 79, 80, 77, 75, 76, 91, 82, 74

   krat. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da imajo vse cifre enako verjetnost pojavljanja.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3.6.1999

1. Imamo kovanca A in B z neznano verjetnostjo, da pade grb p oziroma p'.

   (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{1}{12}$. Izračunaj verjetnosti p in p'.

   (b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa A in 2 kovanca tipa B. Izračunaj verjetnost, da so padli 3 grbi in 2 cifri, če veš, da pade vsaj en grb in vsaj ena cifra.

2. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} Cx^2y^2e^{-x}e^{-y}\,; & x, y \geq 0 \\ 0 \,; & \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto C.

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$.

3. Naj bo slučajna spremenljivka porazdeljena enakomerno na intervalu $(0, 1)$. Izračunaj porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke

$$Y = -\frac{\ln(1 - X)}{a}, \quad a > 0\,.$$

4. Kocko vržemo 100 krat in štejemo pojavljanje števila 1 ali 4. Oceni v katerih mejah lahko leži rezultat, da se na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ lahko sprejme hipoteza, da je kocka poštena.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Matematika in računalništvo z matematiko

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3.6.1999

1. Imamo kovanca A in B z neznano verjetnostjo, da pade grb p oziroma p'.
   (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{1}{12}$. Izračunaj verjetnosti p in p'.
   (b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa A in 2 kovanca tipa B. Izračunaj verjetnost, da so padli 3 grbi in 2 cifri, če veš, da pade vsaj en grb in vsaj ena cifra.

2. Dvodimenzionalna slučajna spremenljivka (X, Y) je mešanega tipa, taka, da je X porazdeljena diskretno
$$P[X = k] = \frac{C_1}{2^k}, \quad k = 1, 2, ...$$
in Y porazdeljena zvezno pri pogojni porazdelitvi $Y|X$ z gostoto
$$p(y|X = x) = \begin{cases} C_2 x (1 - y)^{x-1}, & y \in [0, 1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Izračunaj konstanti C_1 in C_2.
   (b) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Izračunaj tudi robno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

3. Delec se giblje po mreži trikotnika ΔABC. Na vsakem koraku se delec iz danega oglišča z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$ premakne v pozitivni smeri in z verjetnostjo $q = 1 - p$ v negativni smeri orientacije trikotnika v sosednje oglišče.
   (a) Gibanje delca opiši z markovsko verigo in klasificiraj stanja markovske verige.
   (b) Za posamezno stanje markovske verige izračunaj $v_i(n)$-verjetnost, da se delec po n korakih prvič vrne v začetno lego.
   (c) Poišči stacionarno porazdelitev in za vsako stanje izračunaj povprečen čas vrnitve.

4. Kocko vržemo 100 krat in štejemo pojavljanje števila 1 ali 4. Oceni v katerih mejah lahko leži rezultat, da se na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ lahko sprejme hipoteza, da je kocka poštena.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 17.6.1999

1. Imamo kovanca A in B z neznano verjetnostjo, da pade grb p oziroma p'.
   (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{2}{3}$, da je padla cifra in grb pa $\frac{1}{2}$. Izračunaj verjetnosti p in p'.
   (b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa A in 2 kovanca tipa B. Izračunaj verjetnost, da pade vsaj en grb in vsaj ena cifra.

2. Na daljici $\overline{AB}$ dolžine l naključno izberemo dve točki. Označimo naslednja dogodka:

   $A-$ medsebojna razdalja med izbranima točkama je manjša od $\frac{1}{2}$;

   $B-$ izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice $\overline{AB}$.

   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$.

3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ k(x-1)^2 & ; 1 < x \leq 3 \\ 1 & ; \quad x > 3 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanto k in gostoto porazdelitve $p(x)$.
   (b) Kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti z intervala $(1, 2)$?

4. Istočasno vržemo 5 enakih poštenih kovancev in štejemo število padlih grbov. V tabeli so rezultati po 320-tih metih, kjer je x_j število metov v katerih se je pojavilo m_j grbov.

x_j	0	1	2	3	4	5
m_j	7	41	98	114	54	6

   Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je omenjena porazdelitev binomska t.j. $p_n(k) = \binom{n}{k}$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 17.6.1999

1. Igralca izmenično mečeta dve igralni kocki. zmaga tisti igralec, ki prvi vrže kocki tako, da je vsota pik 8 ali 9. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?

2. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Kakšna je verjetnost, da njihova vsota leži na intervalu $[1,2]$ (Pomoč: geometrijska verjetnost.)

3. Naj bo slučajni vektor (X,Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}; & x,y \geq 0 \\ 0 \quad ; & \text{sicer} \end{cases} .$$

   Kako je porazdeljen slučajni vektor (U,V), kjer je $U = X+Y$ in $V = X/Y$? Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?

4. Z intervala $(0,2)$ naključno izbiramo število x. Označimo naslednje dogodke

$$A_1 := x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] ; \quad A_2 := x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] ; \quad A_3 := x \in \left(1, \frac{3}{2}\right] ; \quad A_4 := x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) .$$

   Po 80-tih izbiranjih smo dobili naslednje rezultate

A_1	A_2	A_3	A_4
30	30	10	10

   Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ zavrnemo hipotezo, da je izbiranje števila porazdeljeno z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x; & x \in (0,2) \\ 0 \quad ; & \text{sicer} \end{cases} .$$

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Matematika in računalništvo z matematiko

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 17.6.1999

1. V žepu imamo 3 kovance. Dva sta poštena, grb in cifra padeta z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, tretji pa ima na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Dobimo grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na spodnji strani grb?

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Kakšna je verjetnost, da njihova vsota leži na intervalu $[1, 2]$ (Pomoč: geometrijska verjetnost.)

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto
$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}; & x, y \geq 0 \\ 0 \quad ; & \text{sicer} \end{cases} .$$
Kako je porazdeljen slučajni vektor (U, V), kjer je $U = X + Y$ in $V = X/Y$? Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?

4. Raziskuje se verjetnost pojavljanja dogodka A v nekem eksperimentu. V 100 ponovitvah eksperimenta se je dogodek A pojavil 32 krat. Na osnovi zaupanja $\alpha = 0.95$ določi interval zaupanja za verjetnost dogodka A. (Pomoč: statistika $\frac{K-np}{\sqrt{npq}} \approx N(0, 1)$.)

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 26.8.1999

1. Vržemo pošteno igralno kocko, nato pa pošten kovanec tolikokrat koliko pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da dobimo enako število grbov kot cifer.

2. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Kakšna je verjetnost, da je njihova vsota večja od 1, če veš, da je vsota kvadratov prvih dveh števil manjša od 1. (Pomoč: geometrijska verjetnost.)

3. Določi zvezo med a in b, tako da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-b^2 x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

gostota porazdelitve slučajne spremenljivke X in določi matematično upanje ter disperzijo slučajne spremenljivke $Y = 3X + 1$.

4. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 55 grbov in 45 cifer.

   (a) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je kovanec pošten.

   (b) Kolikšno je najmanjše (največje) število padlih grbov, da hipoteze o poštenosti kovanca ne zavrnemo?
   (Pomoč: χ^2-test.)

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 26.8.1999

1. V žepu imamo 5 kovancev. Trije so pošteni, grb in cifra padeta z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, dva pa ima na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Dobimo grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na spodnji strani grb?

2. Na intervalu $[0, l]$ izberemo dve števili, ki interval razdelita na tri dele. Kakšna je verjetnost, da je sredinski del t.j. del med izbranima številoma največji, levi del t.j. del, ki vsebuje 0 pa najmanjši?

3. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = a\,|x|^3\, e^{-x^2}.$$

   (a) Izračunaj konstanto a in $k-$ti začetni moment spremenljivke X. Koliko je $E(X)$ in $D(X)$?
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$?

4. Hipotezo, da je kocka poštena, smo preizkusili tako, da smo $256-$krat metali kocko tako dolgo, dokler ni prvič padla katera liha vrednost. Dobili smo naslednje rezultate

št. metov	1	2	3	4	5	6	7	več
št. izvedb	108	60	40	24	12	5	5	2

Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ hipotezo zavrnemo?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 9.9.1999

1. Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo
$$G_X(t) = \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}\,.$$
   (a) Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X.
   (b) Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X?

2. Z intervala $[0,1]$ naključno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$vsota izbranih števil je manjša od 1;

   $B-$vsota kvadratov izbranih števil je manjša od 1;

   $C-$vsota kvadratov prvih dveh števil je manjša od 1.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A/B)$, $P(B/C)$.

3. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} a\left(-x^2 + 3x\right); & x \in [0,3] \\ a(-x^2 - 3x); & x \in [-3,0] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$. (Pomoč: upoštevaj simetričnost.)

4. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 8.5$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 15$. S temi podatki testiramo hipotezo $H_0\,(a = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca:$n = 16$, $n = 30$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 9.9.1999

1. Izmed naravnih števil naključno izberemo dve števili a, b. Kakšna je verjetnost,
   (a) da je produkt ab deljiv z 10, če je eno izmed števil sodo;
   (b) da se vsota $a^2 + b^2$ končuje s cifro 9;
   (c) da sta števili tuji, če je eno izmed števil sodo?
2. Na krogu s polmerom R naključno izberemo točke A, B, C. Kakšna je verjetnost, da je trikotnik ABC ostrokoten?
3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Določi gostoto verjetnoati slučajnih spremenljivk $U = |X - Y|$ in $V = \max\{X, Y\}$.
4. Za nenegativno slučajno spremenljivko smo razdelili realno os v razrede

$$S_1 = (-\infty, 1)\,,\ S_2 = [1, 2)\,,\ S_3 = [2, 3)\,,\ S_4 = [3, 4)\,,\ S_5 = [4, 5)\,,\ S_6 = [5, \infty)\ .$$

   V vzorcu velikosti $n = 1000$ smo našli za te razrede frekvence

$$n_1 = 610,\ n_2 = 220,\ n_3 = 100,\ n_4 = 40,\ n_5 = 20,\ n_6 = 10\,.$$

   Na osnovi teh podatkov preskusi hipotezo, da je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases} .$$

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Matematika in računalništvo z matematiko

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 9.9.1999

1. Imamo kovanca A in B z neznano verjetnostjo, da pade grb p oziroma p'.
   (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{1}{12}$. Izračunaj verjetnosti p in p'.
   (b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa A in 2 kovanca tipa B. Izračunaj verjetnost, da so padli 3 grbi in 2 cifri, če veš, da pade vsaj en grb in vsaj ena cifra.

2. Dvodimenzionalna slučajna spremenljivka (X, Y) je mešanega tipa, taka, da je X porazdeljena diskretno
$$P[X = k] = \frac{C_1}{2^k}, \quad k = 1, 2, ...$$
in Y porazdeljena zvezno pri pogojni porazdelitvi $Y|X$ z gostoto
$$p(y|X = x) = \begin{cases} C_2 x (1-y)^{x-1}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Izračunaj konstanti C_1 in C_2.
   (b) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Izračunaj tudi robno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

3. Delec se giblje po mreži trikotnika ΔABC. Na vsakem koraku se delec iz danega oglišča z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$ premakne v pozitivni smeri in z verjetnostjo $q = 1 - p$ v negativni smeri orientacije trikotnika v sosednje oglišče.
   (a) Gibanje delca opiši z markovsko verigo in klasificiraj stanja markovske verige.
   (b) Za posamezno stanje markovske verige izračunaj $v_i(n)$-verjetnost, da se delec po n korakih prvič vrne v začetno lego.
   (c) Poišči stacionarno porazdelitev in za vsako stanje izračunaj povprečen čas vrnitve.

4. Kocko vržemo 100 krat in štejemo pojavljanje števila 1 ali 4. Oceni v katerih mejah lahko leži rezultat, da se na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ lahko sprejme hipoteza, da je kocka poštena.

Naloge so enakovredne.