

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 30.1.2001

1. Naj bodo $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 4]$ in $z \in [-1, 3]$ neodvisno izbrana števila iz danih intervalov. Izračunaj verjetnost, da je $y + 2x - 2 < 0$ in $\frac{1}{2} < z < 1$;
2. V trgovini so imeli na zalogi med seboj pomešanih 20 izdelkov prve vrste in 10 izdelkov druge vrste. Zaporedoma so prodali dvema kupcema vsakemu po tri izbrane izdelke. Kakšna je verjetnost, da
 - (a) sta oba kupca dobila vsak po en izdelek prve vrste in dva izdelka druge vrste;
 - (b) je eden od obeh kupcev dobil vse izdelke prve vrste, drugi pa je dobil 2 izdelka prve vrste.
3. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax & ; 1 < x < 2 \\ 1 & ; 2 \leq x \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanto a in izračunaj gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X . Porazdelitveno funkcijo tudi skiciraj.
 - (b) Izračunaj verjetnost dogodkov $A : \frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2}$ in $B : X \geq \frac{9}{5}$.
 - (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = \frac{1}{2}X - 1$?
4. Center republike Slovenije za obveščanje je skozi celo leto beležil število požarov, ki so izbruhnili v državi. Dobljeni rezultati so v tabeli:

Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
50	40	30	40	75	90	65

Ali lahko pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnamo hipotezo, da je pojavljanje požarov neodvisno od dneva.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 30.1.2001

1. Naj bodo $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 4]$ in $z \in [-1, 3]$ neodvisno izbrana števila iz danih intervalov. Izračunaj verjetnost, da

(a) je $y + 2x - 2 < 0$ in $\frac{1}{2} < z < 1$;

(b) razdalja med točkama x in z ne presega 2 enoti in je $y < 3$.

2. Trije predelovalci dobavljajo tovarni enake polizdelke v razmerju 5 : 3 : 2. Med polizdelki prvega predelovalca je 95% kvalitetnih, med tistimi od drugega je 90% kvalitetnih in od tretjega 85% kvalitetnih.

(a) Kakšna je verjetnost, da je slučajno izbran polizdelek kvaliteten?

(b) Kakšna je verjetnost, da je slučajno izbran kvaliteten izdelek od prvega predelovalca?

3. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a} x^2 e^{y-x} & ; x > 0, y < 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto a in zapiši robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$ komponent X in Y .

(b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka Z , ki je enaka večjemu od korenov kvadratne enačbe $\frac{1}{2}t^2 + Xt + \frac{1}{2}Y = 0$?

4. Z intervala $(1, 2)$ naključno izbiramo število x . Označimo dogodke:

$$A : 1 < x \leq \frac{5}{4}, \quad B : \frac{5}{4} < x \leq \frac{3}{2}, \quad C : \frac{3}{2} < x \leq \frac{7}{4}, \quad D : \frac{7}{4} < x \leq 2.$$

Po 50-tih izbiranjih smo dobili naslednje rezultate:

A	B	C	D
25	20	30	40

Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ zavrtnemo hipotezo, da je izbiranje števila porazdeljeno z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & ; 1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ?$$

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 30.1.2001

1. Naj bodo $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 4]$ in $z \in [-1, 3]$ neodvisno izbrana števila iz danih intervalov. Izračunaj verjetnost, da

(a) je $y + 2x - 2 < 0$ in $\frac{1}{2} < z < 1$;

(b) razdalja med točkama x in z ne presega 2 enoti in je $y < 3$.

2. Trije predelovalci dobavljajo tovarni enake polizdelke v razmerju 5 : 3 : 2. Med polizdelki prvega predelovalca je 95% kvalitetnih, med tistimi od drugega je 90% kvalitetnih in od tretjega 85% kvalitetnih.

(a) Kakšna je verjetnost, da je slučajno izbran polizdelek kvaliteten?

(b) Kakšna je verjetnost, da je slučajno izbran kvaliteten izdelek od prvega predelovalca?

3. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a} x^2 e^{y-x} & ; x > 0, y < 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto a in zapiši robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$ komponent X in Y .

(b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka Z , ki je enaka večjemu od korenov kvadratne enačbe $\frac{1}{2}t^2 + Xt + \frac{1}{2}Y = 0$?

4. Na Gimnaziji Center v Celju so učitelji primerjali rezultate, ki jih je 15 dijakov doseglo na maturi iz matematike in filozofije. Rezultati (v točkah) so bili naslednji:

dijaki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
matematika	17	18	16	20	18	25	15	24	14	26	15	24	9	27	7
filozofija	21	23	13	19	19	29	17	21	8	25	15	20	12	27	10

Učitelji so sklenili, da je znanje enega in drugega predmeta povezano. Ali lahko s stopnjo značilnosti $\alpha = 0,0494$ potrdimo njihovo hipotezo odvisnosti znanja matematike ter filozofije?

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 20.2.2001

1. Z intervala $[0, 2]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Izračunaj verjetnost, da je $x^2 + y^2 < 1$, $y + x > \frac{1}{2}$ in $1 < z < 2$.
2. Na zalogi imamo 50 izdelkov, od tega je 40 prvovrstnih in 10 slabših. Prvemu kupcu pošljemo 10 slučajno izbranih izdelkov, nato pa še drugemu 20 slučajno izbranih izdelkov. Kakšna je verjetnost, da
 - (a) drugi kupec ni dobil nobenega slabšega izdelka, če je prvi kupec dobil natanko en slabši izdelek.
 - (b) drugi kupec dobi največ 2 slaba izdelka pri pogojih iz (a).
3. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-2|x|} & ; x \in [-\ln 2, \ln 2] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanto a .
 - (b) Izračunaj verjetnost dogodkov $A : 0 \leq x < \frac{1}{2}$ in $B : x > 1$.
 - (c) Izračunaj matematično upanje $E(X)$.
4. Iz intervala $[0, 6)$ naključno izbiramo število X . Po 100-tih izbiranjih dobimo naslednje rezultate:

interval	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$
n_i	21	18	12	9	19	21

Ali lahko s temi podatki na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ zavrneemo hipotezo, da je porazdelitev enakomerna?

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 5.6.2001

1. Naključno in neodvisno izberemo 5 števil od 1 do 9 in jih seštejemo. Kakšna je verjetnost, da je vsota sodo število?
2. Palico dolžine $2l$ naključno prelomimo. Dobljena dela palice sta sosednji stranici pravokotnika. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina dobljenega pravokotnika večja od $\frac{1}{4}l^2$?

3. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a(|x| - x^2); & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanto a .
 - (b) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X , $E(X)$ ter $D(X)$.
4. Na vzorcu populacije $n = 200$ smo dobili naslednje rezultate normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X

x_j	-3	-1	0	2	4	6	9	11
m_j	2	8	23	60	45	30	22	10

Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je matematično upanje $a = 4$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 5.6.2001

1. Naključno in neodvisno izberemo n števil od 1 do 9 in jih seštejemo. Kakšna je verjetnost, da je vsota sodo število?
2. Točko T naključno izberemo v kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo točke T do najbližje stranice. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Izračunaj $E(X)$!
3. Gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p(x, y) = \begin{cases} a(x + y) & ; -1 \leq x, y \leq 1, x + y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanto $a \in \mathbb{R}$.
 - (b) Kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka $Z = X + Y$ zavzame vrednost z intervala $[1, 2]$?
4. Na vzorcu populacije $n = 200$ smo dobili naslednje rezultate normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X

x_j	-3	-1	0	2	4	6	9	11
m_j	2	8	23	60	45	30	22	10

Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je matematično upanje $a = 4$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 5.6.2001

1. Naključno in neodvisno izberemo $n \geq 2$ števil od 1 do 9 in jih seštejemo. Kakšna je verjetnost, da je vsota sodo število?
2. Točko T naključno izberemo v kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo točke T do najbližje diagonale. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Izračunaj $E(X)$!
3. Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2x}{3-x}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = (2e^{it} - 1)^{-1}$.
 - (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y ?
 - (b) Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke $Z = X + Y$.
4. 15 dijakov sta ocenjevala učitelj matematike in učitelj slovenščine. Razvrščeni so v abecednem vrstnem redu z rangi 1, 2, ..., 15.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
15	11	1	3	8	9	12	2	7	13	5	13	6	9	4
14	15	4	2	6	13	12	1	10	10	3	8	8	7	5

Na stopnji tveganja $\alpha = 0.01$ preveri, ali sta znanje matematike in znanje slovenščine neodvisni drug od drugega.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 26.6.2001

1. V žepu imamo 3 kovanice po 1 tolar, 5 kovanecv po 2 tolarja in 2 kovanca po 5 tolarjev. Naključno iz žepa potegnemo 2 kovanca. Kakšna je verjetnost, da je en od kovanecv vreden 2 tolarja, če sta izvlečena kovanca različna?
2. V kvadratu $ABCD$ naključno izberemo točko T . Kakšna je verjetnost, da je točka T bližje središču kvadrata, kot pa kateremu od oglišč.
3. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{|x|+2} & ; x \in [-2, 2] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

- (a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ ter določi konstanto a in izračunaj $E(X)$.
 - (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = X^2$?
4. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena $N(a, \sigma)$, z znano disperzijo $\sigma = 2$. Na vzorcu 25 poskusov želimo na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preiskusiti hipotezo, da je $a = 0$ proti alternativni $a \neq 0$.

x_j	-4	-2	-1	0	1	3
m_j	3	5	6	5	3	3

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 26.6.2001

1. V predalu je pet parov modrih, trije pari zelenih in šest parov črnih nogavic, ki so pomešane in niso zložene po parih. V temi je nekdo segel v predal in izvlekel par nogavic iste barve. Kakšna je verjetnost, da so bile nogavice zelene?
2. V kvadratu $ABCD$ naključno izberemo točko T . Kakšna je verjetnost, da je točka T bližje diagonali kvadrata, kot pa kateri od stranic?

3. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = a|x|e^{-x^2}.$$

- (a) Izračunaj konstanto a in k -ti začetni moment spremenljivke X , $E(X)$ in $D(X)$.
 - (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \min\{X, Y\}$? Njeno porazdelitev izrazi s pomočjo gostote in porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke X !
4. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena $N(a, \sigma)$, z znano disperzijo $\sigma = 2$. Na vzorcu 25 poskusov želimo na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preiskusiti hipotezo, da je $a = 0$ proti alternativi $a \neq 0$.

x_j	-4	-2	-1	0	1	3
m_j	3	5	6	5	3	3

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 26.6.2001

1. V predalu je r_1 parov modrih, r_2 parov zelenih in r_3 parov črnih nogavic, ki so pomešane in niso zložene po parih. V temi je nekdo segel v predal in izvlekel par nogavic iste barve. Kakšna je verjetnost, da so bile nogavice zelene?
2. V kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ naključno izberemo točko T . Kakšna je verjetnost, da je točka T bližje diagonali kvadrata, kot pa kateri od stranic?
3. Gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p(x, y) = \begin{cases} a(1 - xy) & ; |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Določi konstanto $a \in \mathbb{R}$ in izračunaj gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = Y + |X|$.

4. V nekem kraju veljajo za vreme naslednje ugotovitve: če je nekega dne tam slabo vreme, ostane slabo tudi naslednji dan z verjetnostjo $\frac{1}{4}$. Če pa je vreme lepo, ostane tako z verjetnostjo $\frac{2}{3}$.
 - (a) Spreminjanje vremena predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti).
 - (b) Kakšna je verjetnost, da bo vreme po n dnevih spet lepo, če je sedaj lepo?
 - (c) Klasificiraj obe stanji markovske verige. Po koliko dneh se v povprečju ponovi slabo vreme?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.8.2001

1. Kocka ima tri stranske ploskve pobarvane z rdečo barvo, dve z zeleno barvo in eno z belo barvo. Kocko vržemo štirikrat. Kakšna je verjetnost, da bo padla na rdečo in zeleno ploskev enakokrat?

2. Diskretna slučajna spremenljivka X ima verjetnostno funkcijo

$$p_k = P[X = k] = \frac{C}{2^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Določi konstanto C .
- (b) Zapiši rodovno funkcijo in izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

3. Zvezna slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |x|) & ; x \in [-2, 2] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

- (a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ in zapiši porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.
- (b) Kakšna je verjetnost, da je $X \in [-1, 1]$?

4. Kocko vržemo 120 krat. Pri tem smo dobili naslednje rezultate:

x_j	1	2	3	4	5	6
m_j	17	23	17	22	20	21

Preiskusimo hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.8.2001

1. V šoli je a učencev prvega razreda, b učencev drugega razreda in c učencev tretjega razreda. Naključno izberemo dva učenca. Drugi učenec hodi v višji razred kot prvi. Kakšna je pogojna verjetnost, da prvi učenec obiskuje prvi razred?

2. Slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{6x}{(x-3)(x-4)}.$$

Izračunaj $E(X)$ in poišči verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X !

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto porazdelitve

$$p(x, y) = \begin{cases} A(1 + x^2 + y^2)^{-2} & ; x, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto A .

(b) Kako je porazdeljen slučajni vektor (U, V) , kjer je $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ in $V = \sqrt{Y/X}$? Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?

4. Del ravnine je razdeljen na 576 enakih območij. Na ta del ravnine naključno pade 576 točk. Označimo z m_j število območij na katera je padlo x_j točk. Dobimo naslednje rezultate:

x_j	0	1	2	3	4	5
m_j	229	211	93	35	7	1

Ali so dobljeni rezultati, na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$, v nasprotju s Poissonovo porazdelitvijo, to je $p_k = \frac{1}{k!} a^k e^{-a}$? (Pomoč: pri Poissonovi porazdelitvi je $E(X) = a$.)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.8.2001

1. V šoli je a učencev prvega razreda, b učencev drugega razreda in c učencev tretjega razreda. Naključno izberemo dva učenca. Drugi učenec hodi v višji razred kot prvi. Kakšna je pogojna verjetnost, da prvi učenec obiskuje prvi razred?
2. Točko T naključno izberemo v kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo točke T do najbližjega oglišča. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ?
3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto porazdelitve

$$p(x, y) = \begin{cases} A(1 + x^2 + y^2)^{-2} & ; x, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

- (a) Določi konstanto A .
 - (b) Kako je porazdeljen slučajni vektor (U, V) , kjer je $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ in $V = \sqrt{Y/X}$? Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?
4. Naj bo $f_X(t) = \frac{\sin at}{at}$, $f_X(0) = 1$, karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X . Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X .

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 12.9.2001

1. Štirje stroji A, B, C in D so postavljeni v oglišča kvadrata. Okvara posameznega stroja je enako verjetna. Določi povprečno pot, ki jo vzdrževalec prehodi, če ima svojo postajo v točki A iz katere vsakokrat odide po najkrajši poti do pokvarjenega stroja in se po popravilu spet vrne v točko A .
2. Nekdo pride vsak dan na avtobusno postajo naključno med sedmo in deveto uro. Vedno vstopi na avtobus A ali na avtobus B ; na tistega, ki prej pride. Vozni red avtobusa A je $7^{10}, 7^{40}, 8^{10}$ in 8^{40} in vozni red avtobusa B je $7^{25}, 7^{50}, 8^{30}$ in 9^{00} . Kakšna je verjetnost, da se pelje v službo z avtobusom A ?
3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 2 \\ a(x-2)^2 & ; 2 < x \leq 4 \\ b & ; x > 4 \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanti a, b in gostoto porazdelitve $p(x)$.
 - (b) Kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti z intervala $(1, 3)$?
4. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 53 grbov in 47 cifer.
 - (a) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da je kovanec pošten.
 - (b) Kolikšno je najmanjše (največje) število padlih grbov, da hipoteze o poštenosti kovanca ne zavrnamo?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 12.9.2001

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Določi verjetnost, da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj!
2. Nekdo pride vsak dan na avtobusno postajo naključno med sedmo in deveto uro. Vedno vstopi na avtobus A ali na avtobus B ; na tistega, ki prej pride. Vozni red avtobusa A je $7^{10}, 7^{40}, 8^{10}$ in 8^{40} in vozni red avtobusa B je $7^{25}, 7^{50}, 8^{30}$ in 9^{00} . Kakšna je verjetnost, da se pelje v službo z avtobusom A oz B ?
3. Na intervalu dolžine 2 naključno in neodvisno izberemo točki A in B , in sicer z gostoto verjetnosti, ki je premo sorazmerna s kvadratom oddaljenosti izbrane točke od središča intervala. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo med točkama A in B . Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Izračunaj $E(X)$!

4. Za nenegativno slučajno spremenljivko smo razdelili realno os v razrede

$$S_1 = (-\infty, 1), S_2 = [1, 2), S_3 = [2, 3), S_4 = [3, 4), S_5 = [4, 5), S_6 = [5, \infty).$$

V vzorcu velikosti $n = 1000$ smo našli za te razrede frekvence

$$n_1 = 610, n_2 = 220, n_3 = 100, n_4 = 40, n_5 = 20, n_6 = 10.$$

Na osnovi teh podatkov preskusi hipotezo, da je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}.$$

Naloge so enakovredne.