Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 28. 1. 2003

1. Štirje ljudje vstopijo v pritljičju osem nadstropne stavbe v dvigalo in izstopijo naključno in neodvisno v enem izmed osmih nadstropij. Kakšna je verjetnost, da nobena dva človeka ne izstopita v istem nadstropju?

2. Pri metu treh poštenih kock so padle same različne vrednosti. Kakšna je verjetnost, da je med njimi tudi enica?

3. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti z intervala $[-1, 2]$.

4. Na intervalu $[0, 2]$ naključno izberemo točko.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je izbrana točka bliže krajišču intervala kot njegovemu središču?

   (b) Naj slučajna spremenljivka X meri oddaljenost točke od središča intervala. Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto in porazdelitveno funkcijo ter matematično upanje.

5. Naenkrat vržemo tri igralne kocke. Število padlih šestic naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Predpostavimo, da so kocke poštene. Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo, porazdelitveno funkcijo in izračunaj matematično upanje.

   (b) Pri 2160-tih metih treh kock smo tako prešteli naslednje število padlih šestic:

x_i	0	1	2	3
n_j	1150	700	300	10

   Ali lahko na osnovi teh podatko s tveganjem $\alpha = 0.01$ zavrnemo hipotezo, da so kocke poštene?

Točke so razporejene po nalogah: $15 + 20 + 15 + 25 + 25$.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetnai študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 28. 1. 2003

1. (a) Štirje ljudje vstopijo v pritljičju osem nadstropne stavbe v dvigalo in izstopijo naključno in neodvisno v enem izmed osmih nadstropij. Kakšna je verjetnost, da nobena dva človeka ne izstopita v istem nadstropju?
   (b) Pri metu treh poštenih kock so padle same različne vrednosti. Kakšna je verjetnost, da je med njimi tudi enica?

2. S kvadrata $[-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ naključno izberemo točko T. Naj slučajna spremenljivka meri oddaljenost točke T od diagonale kvadrata $y = x$.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto.
   (b) Izračunaj povprečno oddaljenost točke od diagonale in $P\left(X \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = e^{-2|x|}\,.$$
   (a) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X, $E(X)$ ter $D(X)$.
   (b) Kako je porazdeljena zvezna slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

4. Naenkrat vržemo n igralnih kock. Število padlih šestic naj bo slučajna spremenljivka X.
   (a) Predpostavimo, da so kocke poštene. Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo, porazdelitveno funkcijo in izračunaj matematično upanje.
   (b) Pri 2160-tih metih treh kock smo tako prešteli naslednje število padlih šestic:

x_i	0	1	2	3
n_j	1150	700	300	10

   Ali lahko na osnovi teh podatko s tveganjem $\alpha = 0.01$ zavrnemo hipotezo, da so kocke poštene?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 11. 2. 2003

1. Imamo pošteno igralno kocko in kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{3}$. Najprej vržemo igralno kocko in nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da je pri tem padlo več grbov kot cifer.

2. V krog je včrtan kvadrat. V krog naključno in neodvisno vržemo 6 točk.

   (a) Kakšna je verjetnost, da naključno vržena točka leži znotraj kvadrata?

   (b) Kakšna je verjetnost, da štiri točke od šestih ležijo znotraj kvadrata?

   (c) Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo število točk, ki ležijo znotraj kvadrata. Kako je porazdeljena X? Kolikšno je pričakovano število točk, ki ležijo znotraj kvadrata?

3. Na intervalu $[0, 2]$ naključno in neodvisno izberemo dve točki. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo med točkama.

   (a) Izračunaj verjetnost, da je $X < 1$.

   (b) Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto in porazdelitveno funkcijo!

   (c) Kolikšna je povprečna razdalja med točkama?

4. Po križanju dveh sort fižola so teoretične verjetnosti, da bomo dobili rumeni, zeleni, rdeči in beli fižol po vrsti $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$ in $\frac{1}{16}$. V 160-tih poskusih križanja smo dobili naslednje rezultate:

rumeni	zeleni	rdeči	beli
86	35	26	13

   Ali se ti rezultati na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ bistveno razlikujejo od teoretično pričakovanih?

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 25 + 30 + 20$.

Univerza v Mariboru
FERI - Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 11. 2. 2003

1. Imamo pošteno igralno kocko in kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{3}$. Najprej vržemo igralno kocko in nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da je pri tem padlo več grbov kot cifer.

2. Naključno izberimo dve oglišči pravilnega $2n$-kotnika s stranico a. Vrednost slučajne spremenljivke X je dolžina najkrajše poti po obodu $2n$-kotnika med izbranima ogliščema. Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X? Izračunaj tudi $E(X)$!

3. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen z gostoto

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2}\varphi & ; \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & ; \varphi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} .$$

   Naj zvezna slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto.

4. Na avtomatu za polnjenje sladkorja v vrečke piše, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 1 kg enak 0.02 kg. Na vzorcu 16-tih vrečk so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 1.025$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 0.015$. Na osnovi teh podatkov in stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezi:

   $H_0(a = 1)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 1)$ in

   $H_0(\sigma = 0.02)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\sigma \neq 0.02)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 5. 2003

1. Študent ima 5 parov zvezkov (predavanja in vaje) iz različnih predmetov. Naključno izbere 6 zvezkov. Število kompletnih parov zvezkov je slučajna spremenljivka X. Kako je porazdeljena X? Izračunaj tudi $E(X)$!

2. V škatli je 6 belih in 3 črne kroglice. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili črni. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila bela kroglica?

3. Na kvadratu s stranico 2 enoti slučajno izberemo točko T. Označimo naslednje dogodke:

   A - razdalja točke T do najbližje stranice je manjša od $\frac{1}{2}$ enote,

   B - točka T je bližje središču kvadrata kot pa kateremu oglišču,

   C - točka T je od središča kvadrata oddaljena več kot 1 enoto.

   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ in $P\left(B|\overline{C}\right)$ ter $P(B|A)$.

4. Slučajna spremenljivke X je podana z grafom porazdelitvene funkcije; glej sliko na tabli. Izračunaj verjetnosti naslednjih dogodkov: $P(X=-3)$, $P(X=3)$, $P(-1 \leq X \leq 1)$. Kako je X porazdeljena na intervalu $[-1,1]$?

5. Življenska doba žarnic X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a,\sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n=21$ žarnic izračunal vzorčno povprečje $\overline{X}=1060\ ur$ in $\sum\left(X-\overline{X}\right)^2=312500\ ur^2$. Ali lahko na osnovi teh podatkov pri stopnji značilnosti $\alpha=0.05$ zavrnemo hipotezo, da je $E(X)=1000$ ur?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 5. 2003

1. Študent ima n parov zvezkov (predavanja in vaje) iz različnih predmetov. Naključno izbere $2r$, $2r \leq n$, zvezkov. Število kompletnih parov zvezkov je slučajna spremenljivka X. Kako je porazdeljena X?

2. V škatli je m belih in n $(n \geq 3)$ črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili črni. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila bela oz. črna kroglica?

3. Točko T izberemo slučajno na kvadratu $[-1,1] \times [-1,1]$. Slučajna spremenljivka X meri razdaljo te točke do najbližje koordinatne osi Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve. Izračunaj tudi povprečno oddaljenost točke T do najbližje stranice.

4. Gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p(x,y) = \begin{cases} A\,|y-x| & ; \ -1 \leq x, y \leq 1 \\ B & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanti A in B.

   (b) Kako sta porazdeljeni komponenti X in Y? Ali sta neodvisni?

   (c) Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = \max\{|X|, |Y|\}$?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 8. 5. 2003

1. Dana so števila $1, 2, \ldots, n$. Naključno in neodvisno izberemo k števil. Najmanjše število izmed izbranih je slučajna spremenljivka X. Katere vrednosti zavzame slučajna spremenljivka X? Zapiši tudi verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

2. V škatli je m belih in n $(n \geq 3)$ črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili črni. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila bela oz. črna kroglica?

3. Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljiki X in Y sta neodvisni. Slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2x}{3-x}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = (2e^{it} - 1)^{-1}$.

   (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y?

   (b) Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke $Z = X + Y$.

4. Točko T izberemo slučajno na kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Slučajna spremenljivka X meri razdaljo te točke do najbližje koordinatne osi Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve. Izračunaj tudi povprečno oddaljenost točke T do najbližje stranice.

5. V nekem ribniku je N rib. Da bi približno ocenili njihovo število, so vanj spustili 100 označenih rib. Čez nekaj časa so ulovili 400 rib in med njimi je bilo 5 označenih rib. Določi 95% interval zaupanja za število rib v ribniku.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 5. 2003

1. Dana so števila $1, 2, \ldots, 8$. Naključno in neodvisno izberemo 4 števila. Največje število izmed izbranih je slučajna spremenljivka X. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

2. V škatli je m belih in n $(n \geq 3)$ črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili črni. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila bela oz. črna kroglica?

3. Na kvadratu s stranico 2 enoti slučajno izberemo točko T. Označimo naslednje dogodke:

   A - razdalja točke T do najbližje stranice je manjša od $\frac{1}{2}$ enote,

   B - točka T je bližje središču kvadrata kot pa kateremu oglišču,

   C - točka T je od središča kvadrata oddaljena več kot 1 enoto.

   Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ in $P\left(B|\overline{C}\right)$ ter $P(B|A)$.

4. Točko T izberemo slučajno na kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Slučajna spremenljivka X meri razdaljo te točke do najbližje koordinatne osi Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve. Izračunaj tudi povprečno oddaljenost točke T do najbližje stranice.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10. 6. 2003

1. Najprej vržemo pošteno igralno kocko in nato pošten kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Slučajna spremenljivka X meri število grbov, ki pri tem pade. Kako je porazdeljena X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! Koliko grbov pade v povprečju?

2. Nekdo ima v žepu 4 kovance po 1 tolar, 8 kovancev po 2 tolarja in 5 kovancev pa 5 tolarjev. Na slepo izvleče iz žepa dva kovanca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je eden od obeh vreden 5 tolarjev, če sta različnih vrednosti.

3. Na intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Kolikšna je verjetnost, da je vsota izbranih števil manjša od 1, njun produkt pa večji od $-\frac{1}{9}$?

4. Poišči taki konstanti a in b, da bo funkcija $F_X(x) = a + b \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X. Poišči še gostoto te porazdelitve in izračunaj $P[-2 \leq X < 2]$.

5. V 210-tih metih kocke smo dobili naslednje rezultate

x_k	1	2	3	4	5	6
m_k	15	18	26	42	53	56

.

Ali so eksperimentalni razultati na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ v nasprotju s hipotezo, da je metanje kocke X porazdeljeno po zakonu $p_k = P[X = k] = \frac{k}{21}$, kjer je $k = 1, 2, ..., 6$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10. 6. 2003

1. Najprej vržemo pošteno igralno kocko in nato kovanec (verjetnost, da pade grb je $0 < p < 1$) tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Slučajna spremenljivka X meri število grbov, ki pri tem pade. Kako je porazdeljena X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! Koliko grbov pade v povprečju, če je $p = \frac{1}{2}$?

2. Nad daljico AB dolžine 1 z razpoloviščem S narišemo polkrog s središčem S. Na polkrogu naključno izberemo točko C. Naj slučajna spremenljivka X meri ploščino ΔABC.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto!

   (b) Kolikšna je povprečna ploščina ΔABC?

3. Gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p(x,y) = \begin{cases} A\,(x+y)\,e^{-x-y} & ;\ x,y > 0 \\ B & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

   (a) Določi konstanti A in B.

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. Določi interval zaupanja za povprečno število rib a v ribiški mreži s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ $(\alpha = 0.025)$, pri čemer je število rib porazdeljeno normalno $N(a, \sigma)$ z $\sigma = 60$. Ribiči so po 25-tih ulovih izračunali povprečno 900 rib v ribiški mreži.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 10. 6. 2003

1. Najprej vržemo pošteno igralno kocko in nato kovanec (verjetnost, da pade grb je $0 < p < 1$) tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Slučajna spremenljivka X meri število grbov, ki pri tem pade. Kako je porazdeljena X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! Koliko grbov pade v povprečju, če je $p = \frac{1}{2}$?

2. Nad daljico AB dolžine l z razpoloviščem S narišemo polkrog s središčem S. Na polkrogu naključno izberemo točko C. Naj slučajna spremenljivka X meri ploščino ΔABC in Y naj meri obseg danega trikotnika.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto!

   (b) Kolikšna sta povprečna ploščina in povprečni obseg ΔABC?

3. Slučajni spremenljivki X_1 in X_2 sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Naj bosta $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ in $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$.

   (a) Določi gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke Y_1 in Y_2, slučajnega vektorja (Y_1, Y_2) ter pogojne slučajne spremenljivke $Y_1|Y_2$ in $Y_2|Y_1$.

   (b) Izračunaj regresijo $E(Y_1|Y_2)$ in $E(Y_2|Y_1)$.

4. Pri bančni reviziji so naključno izbrali 1000 poročil in pri njih ugotovili število napak X. Dobljeni rezultati so predstavljeni v tabeli

X	0	1	2	3	4	5	več
n_k	220	330	261	121	55	13	0

.

   Sumili so, da je število napak porazdeljeno po Poissonovem zakonu, to je $p_k = \frac{1}{k!}a^k e^{-a}$, kjer je $a > 0$.

   (a) Z ustrezno cenilko določi a!

   (b) Ali so dobljeni rezultati, na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$, v nasprotju z domnevo, da je spremenljivka X porazdeljena po Poissonovem zakonu?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10. 6. 2003

1. Najprej vržemo pošteno igralno kocko in nato kovanec (verjetnost, da pade grb je $0 < p < 1$) tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Slučajna spremenljivka X meri število grbov, ki pri tem pade. Kako je porazdeljena X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! Koliko grbov pade v povprečju, če je $p = \frac{1}{2}$?

2. Z intervala $[-a, a]$, kjer je $a > 1$, naključno izberemo dve števili. Označimo naslednje dogodke:

   A- absolutna vrednost vsote izbranih števil je manjša od a;

   B- vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je manjša od a;

   C- produkt izbranih števil je manjši od a.

   (a) Kakšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$?

   (b) Določi a tako, da bo $P\left(A\overline{C}\right) = 0$.

3. Gostota verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p(x, y) = \begin{cases} A(x + y)e^{-x-y} & ; \ x, y > 0 \\ B & ; \ \text{sicer} \end{cases}.$$

   (a) Določi konstanti A in B.

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. Pri nočnem letu letala je osvetljen koridor višine 100 m, kjer je predvidena višina leta na sredini koridorja. Zaradi sistemske napake leti letalo v povprečju 20 m nižje od predvidene višine. Slučajna napaka pri letu letala je porazdeljena normalno s standardnim odklonom 40 m.

   (a) Kakšna je verjetnost, da letalo leti znotraj osvetljenega koridorja?

   (b) Kakšna je verjetnost, da je letalo pod osvetljenim koridorjem?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 6. 2003

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Izračunaj verjetnost dogodka, da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj.

2. V dveh žarah so kroglice. V prvi žari je 6 belih in 3 rdeče, v drugi 3 bele in 8 rdečih kroglic. Iz prve žare prenesemo v drugo dve kroglici, nato pa iz druge žare potegnemo kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je kroglica bela?

   (b) Če smo potegnili rdečo kroglico, kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo žaro prenesli raznobarvni kroglici?

3. Znotraj kroga s polmerom 1 naključno izberemo točko. Verjetnost, da bo izbrana točka v nekem delu kroga, je sorazmerna ploščini tega dela. Oddaljenost točke od središča kroga je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato gostoto!

   (b) Poišči povprečno oddaljenost točke od središča.

4. Vržemo 3 igralne kocke. Število padlih enic naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Predpostavimo, da so kocke poštene. Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo, porazdelitveno funkcijo in izračunaj matematično upanje.

   (b) Pri 2160-tih metih treh kock smo tako prešteli naslednje število padlih enic:

x_i	0	1	2	3
n_j	300	840	780	240

   .

   Ali lahko na osnovi teh podatko s tveganjem $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da so kocke poštene?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 6. 2003

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Izračunaj verjetnost dogodka,
   (a) da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj;
   (b) da bo na eni kocki padla šestica, če so vse padle vrednosti različne.

2. S kvadrata $[-2,2] \times [-2,2] \subseteq \mathbb{R}^2$ naključno izberemo točko T. Označimo dogodka:

   $A-$ oddaljenost točke T od diagonale $y = x$ je največ $\sqrt{2}$;

   $B-$ razdalja točke T do najbližje koordinatnih osi je vsaj 1.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P\left(A\overline{B}\right)$ in $P\left(A|\overline{B}\right)$.

3. Celoštevilska diskretna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo
   $$G_X(t) = \frac{t}{(3-2t)^2}\,.$$
   (a) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X!
   (b) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunaj $P(X \geq E(X))$.

4. Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen enakomerno v ravnini na območju $|x|+|y| \leq 1$.
   (a) Zapiši gostoto slučajnega vektorja (X,Y).
   (b) Izračunaj robni porazdelitvi X in Y.
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 24. 6. 2003

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Izračunaj verjetnost dogodka,
   (a) da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj;
   (b) da bo na eni kocki padla šestica, če so vse padle vrednosti različne.
2. Celoštevilska diskretna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo
   $$G_X(t) = \frac{t}{(3-2t)^2}\,.$$
   (a) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X!
   (b) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunaj $P(X \geq E(X))$.
3. S kvadrata $[-2a, 2a] \times [-2a, 2a] \subseteq \mathbb{R}^2$ naključno izberemo točko T. Naj slučajna spremenljivka meri oddaljenost točke T od diagonale kvadrata $y = x$.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto.
   (b) Izračunaj povprečno oddaljenost točke od diagonale in $P\left(X \geq \sqrt{2}a\right)$.
4. Otroci se z žogo igrajo igro z naslednjimi pravili: Daniel vrže žogo z enako verjetnostjo Ajdi, Maji, Mateju ali pa jo obdrži. Gorazd žogo z enako verjetnostjo vrže Ajdi, Maji, Danielu ali pa jo obdrži. Ajda in Maja žogo enakoverjetno obdržita ali jo vržeta ena drugi. Matej žogo vedno obdrži, ko jo dobi v roke. Podajanje žoge predstavi z markovsko verigo. Kolikšna je verjetnost, da bo žoga prišla v roke deklet, če je bila na začetku pri Gorazdu?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 6. 2003

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Izračunaj verjetnost dogodka,
   (a) da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj;
   (b) da bo na eni kocki padla šestica, če so vse padle vrednosti različne.
2. Na intervalu $[0, 2]$ naključno izberemo točko.
   (a) Kakšna je verjetnost, da je izbrana točka bliže krajišču intervala kot njegovemu središču?
   (b) Naj slučajna spremenljivka X meri oddaljenost točke od središča intervala. Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto in porazdelitveno funkcijo ter matematično upanje.
3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno v ravnini na območju $|x|+|y| \leq 1$.
   (a) Zapiši gostoto slučajnega vektorja (X, Y).
   (b) Izračunaj robni porazdelitvi X in Y.
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?
4. Istočasno vržemo 5 enakih poštenih kovancev in štejemo število padlih grbov. V tabeli so rezultati po 320-tih metih, kjer je x_j število metov v katerih se je pojavilo m_j grbov.

x_j	0	1	2	3	4	5
m_j	7	41	98	114	54	6

   Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je omenjena porazdelitev binomska?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 26. 8. 2003

1. Na knjižni polici je 10 knjig, med njimi so štirje romani. Vsi razporedi knjig na polici so enako verjetni. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   A - na polici stojijo romani skupaj;

   B - prva in zadnja knjiga na polici je roman;

   C - prva ali zadnja knjiga na polici je roman.

2. Janez ima tri poštene kovance, Tone pa dva poštena kovanca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da pri metu kovancev Janez dobi dva grba, če je dobil več grbov kot Tone?

3. V kvadratu s stranico a naključno izberemo točko. Označimo naslednje dogodke:

   A - točka je bližje središču kot kateremu oglišču:

   B - točka je od središča oddaljena vsaj $\frac{a}{2}$;

   C - razdalja točke do najbližje stranice je največ $\frac{a}{4}$.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P\left(A|\overline{B}\right)$ in $P\left(\overline{C}|A\overline{B}\right)$.

4. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je podana s predpisom:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax & ; 1 < x < 2 \\ 1 & ; 2 \leq x \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto a in izračunaj gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X. Porazdelitveno funkcijo tudi skiciraj.

   (b) Izračunaj verjetnost $P\left(\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2}\right)$ in $P\left(X \geq \frac{9}{5}\right)$.

   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = \frac{1}{2}X - 1$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 26. 8. 2003

1. Na knjižni polici je n knjig, med njimi je m $(2 \leq m \leq n-2)$ romanov. Vsi razporedi knjig na polici so enako verjetni. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   A - na polici stojijo romani skupaj;

   B - prva in zadnja knjiga na polici je roman;

   C - prva ali zadnja knjiga na polici je roman.

2. Janez ima 4 poštene kovance, Tone pa 3 poštene kovance. Kolikšna je pogojna verjetnost, da pri metu kovancev Janez dobi 3 grbe, če je dobil več grbov kot Tone?

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} Cx^2y^2e^{-x}e^{-y} & ;\ x, y \geq 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto C.

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$.

4. Za nenegativno slučajno spremenljivko smo razdelili realno os v razrede

$$S_1 = (-\infty, 1)\,,\ S_2 = [1,2)\,,\ S_3 = [2,3)\,,\ S_4 = [3,4)\,,\ S_5 = [4,5)\,,\ S_6 = [5,\infty)\ .$$

   V vzorcu velikosti $n = 1000$ smo našli za te razrede frekvence

$$n_1 = 610,\ n_2 = 220,\ n_3 = 100,\ n_4 = 40,\ n_5 = 20,\ n_6 = 10\,.$$

   Na osnovi teh podatkov pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preskusi hipotezo, da je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ;\quad x > 0 \\ 0 & ;\quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 26. 8. 2003

1. Na knjižni polici je n knjig, med njimi je m $(2 \leq m \leq n-2)$ romanov. Vsi razporedi knjig na polici so enako verjetni. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   A - na polici stojijo romani skupaj;

   B - prva in zadnja knjiga na polici je roman;

   C - prva ali zadnja knjiga na polici je roman.

2. Janez ima 4 poštene kovance, Tone pa 3 poštene kovance. Kolikšna je pogojna verjetnost, da pri metu kovancev Janez dobi 3 grbe, če je dobil več grbov kot Tone?

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen na kvadratu $[0,1] \times [0,1]$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.

   (a) Zapiši gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y).

   (b) Izračunaj $P\left[\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4} | Y = \frac{1}{2}\right]$.

   (c) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$.

4. V nekem kraju veljajo za vreme naslednje ugotovitve: če je nekega dne tam slabo vreme, ostane slabo tudi naslednji dan z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Če pa je vreme lepo, ostane tako z verjetnostjo $\frac{1}{3}$.

   (a) Spreminjanje vremena predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti).

   (b) Kakšna je verjetnost, da bo vreme po n dnevih spet lepo, če je sedaj lepo?

   (c) Klasificiraj obe stanji markovske verige. Po koliko dneh se v povprečju ponovi slabo vreme?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 26. 8. 2003

1. Na knjižni polici je 10 knjig, med njimi so štirje romani. Vsi razporedi knjig na polici so enako verjetni. Izračunaj verjetnosti dogodkov:

   A - na polici stojijo romani skupaj;

   B - prva in zadnja knjiga na polici je roman;

   C - prva ali zadnja knjiga na polici je roman.

2. Nekdo ima v žepu 5 kovancev po 1 tolar, 8 kovancev po 2 tolarja in 4 kovance pa 5 tolarjev. Na slepo izvleče iz žepa dva kovanca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je eden od obeh vreden 5 tolarjev, če sta različnih vrednosti.

3. Točko T naključno izberemo v kvadratu s stranico a. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo točke T do najbližje stranice. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto ter izračunaj $E(X)$!

4. Poišči taki konstanti a in b, da bo funkcija $F_X(x) = a + b \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X. Poišči še gostoto te porazdelitve in izračunaj $P[-1 < X \leq 2]$.

5. Center republike Slovenije za obveščanje je skozi celo leto beležil število požarov, ki so izbruhnili v državi. Dobljeni rezultati so v tabeli:

Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
50	40	40	40	85	100	65

   Ali lahko pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je pojavljanje požarov neodvisno od dneva.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 9. 9. 2003

1. Na koliko načinov lahko:

   (a) razporedimo na polico tri leposlovne knjige, štiri učbenike in dve strokovni knjigi, če morajo učbeniki stati skupaj?

   (b) osem igrač razdelimo med tri otroke tako, da starejša dobita po tri igrače, mlajši pa dve igrači?

   (c) izberemo tri kepice sladoleda, če sladščičar prodaja pet vrst sladoleda?

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

   A - vsota izbranih števil je manjša od 1;

   B - vsota kvadratov izbranih števil je manjša od 1;

   C - vsota kvadratov prvih dveh števil je manjša od 1.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(\overline{B}|C)$.

3. Izdelek dobavljajo trgovini štiri podjetja. Nabavljanje tega izdelka je pri teh podjetjih v razmerju $1 : 2 : 3 : 4$, verjetnosti, da je izdelek neraben pa so za posamezna podjetja zapored: 0.5, 0.4, 0.3 in 0.2. Izdelek izberemo v trgovini na slepo in ugotovimo, da je neraben? Kolika je verjetnost, da izbrani izdelek ni iz tretjega podjetja?

4. Zvezna slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x| & ; x \in [-1, 1] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Zapiši porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in izračunaj $P\left[-\frac{1}{4} \leq X < \frac{3}{4}\right]$.

   (b) Izračunaj n-ti začetni moment slučajne spremenljivke X, $E(X)$ in $D(X)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 9. 9. 2003

1. V škatli so trije pošteni kovanci in dva kovanca, katerih verjetnost, da pade grb, je $\frac{3}{4}$. Iz škatle smo naključno potegnili dva kovanca, ju vrgli in dobili cifro in grb. Izračunaj verjetnost, da sta bila izvlečena kovanca poštena.

2. V posodi imamo 3 bele in 1 rdečo kroglico. Naključno izberemo kroglico in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka T meri število izbir, ki so potrebne, da je rdeča kroglica izbrana dvakrat.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T?

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo $G_T(t)$, matematično upanje $E(T)$ in disperzijo $D(T)$.

3. Palico dolžine l naključno in neodvisno dvakrat prelomimo in dobimo 3 dele. Glede na realno število $a \in [0, l]$ izračunaj verjetnost, da je dolžina vseh delov palice manjša od a. (Pomoč: posebej reši primera $a = \frac{l}{3}$ in $a = \frac{l}{2}$.)

4. Slučajni vektor (X, Y) je neničelno porazdeljen na trikotniku

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x \leq 1\right\}$$

   z gostoto, ki je v vsaki točki premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.

   (a) Zapiši gostoto slučajnega vektorja (X, Y).

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 9. 9. 2003

1. V škatli so trije pošteni kovanci in dva kovanca, katerih verjetnost, da pade grb, je $\frac{3}{4}$. Iz škatle smo naključno potegnili dva kovanca, ju vrgli in dobili cifro in grb. Izračunaj verjetnost, da sta bila izvlečena kovanca poštena.

2. Palica dolžine $2a$ se naključno prelomi (enakomerno vzdolž cele palice). Dobljena odseka sta sosednji stranici pravokotnika. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina tega pravokotnika večja od treh četrtin največje možne ploščine?

3. V posodi imamo 3 bele in 1 rdečo kroglico. Naključno izberemo kroglico in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka T meri število izbir, ki so potrebne, da je rdeča kroglica izbrana dvakrat.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T?

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo $G_T(t)$, matematično upanje $E(T)$ in disperzijo $D(T)$.

4. Štiri igralne kocke smo istočasno vrgli 1296 krat. Preštevali smo število šestic, ki se je pri tem pojavilo. Rezultati so podani v tabeli.

Št. šestic	0	1	2	3	4
Št. realizacij	620	515	126	35	0

   Ali lahko na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je omenjena porazdelitev binomska? Kaj lahko povemo o poštenosti igralnih kock?

Naloge so enakovredne.