

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 5. 2. 2004

1. V posodi imamo pet belih, tri zelene in štiri črne kroglice. Soigralec iz posode najprej izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče na slepo še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kakšna je verjetnost, da je bila prva kroglica bele barve?
2. Dva prijatelja sta se dogovorila, da se bosta srečala na fakulteti med 10. in 14. uro. Njun prihod na dogovorjeno mesto je neodvisen in naključen. Vsak od njiju po prihodu počaka še eno uro in če drugi ne pride, potem odide.
 - (a) Kakšna je verjetnost, da se bosta prijatelja srečala?
 - (b) Koliko časa najmanj bi morala počakati, da bi bila verjetnost srečanja vsaj $\frac{1}{2}$?
3. Dana so števila 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Naključno hkrati izberemo 3 števila. Največje število izmed izbranih je slučajna spremenljivka X .
 - (a) Katere vrednosti zavzame slučajna spremenljivka X ?
 - (b) Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X ter skiciraj njen graf.
 - (c) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
4. Znotraj kroga s polmerom 1 naključno izberemo točko. Oddaljenost točke od roba kroga (krožnice) je slučajna spremenljivka X .
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato gostoto!
 - (b) Poišči povprečno oddaljenost točke od roba.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 5. 2. 2004

1. V posodi imamo pet belih, tri zelene in štiri črne kroglice. Soigralec iz posode najprej izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče na slepo še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kakšna je verjetnost, da je bila prva kroglica bele barve?
2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:
 - A – vsota teh števil je manjša od 2;
 - B – vsota prvih dveh števil, je večja od tretjega;
 - C – z daljicami izbranih dolžin lahko sestavimo trikotnik.Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ in $P(C|A)$.
3. Točko T naključno izberemo v kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo točke T do diagonale lihih kvadrantov.
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto!
 - (b) Izračunaj povprečno oddaljenost točke od diagonale.
4. Življenska doba baterije X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ baterij izračunal vzorčno povprečje $\bar{X} = 1000$ ur in $\sum (X - \bar{X})^2 = 312500$ ur². V katerih mejah lahko leži a , da hipoteze $H_0 (E(X) = a)$ na stopnji zaupanja $\alpha = 0.05$ ne moremo zavrnila.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 5. 2. 2004

1. V posodi imamo pet belih, tri zelene in štiri črne kroglice. Soigralec iz posode najprej izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče na slepo še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kakšna je verjetnost, da je bila prva kroglica bele barve?
2. Dva prijatelja sta se dogovorila, da se bosta srečala na fakulteti med 10. in 14. uro. Njun prihod na dogovorjeno mesto je neodvisen in naključen. Vsak od njiju po prihodu počaka še eno uro in če drugi ne pride, potem odide.
 - (a) Kakšna je verjetnost, da se bosta prijatelja srečala?
 - (b) Koliko časa najmanj bi morala počakati, da bi bila verjetnost srečanja vsaj $\frac{1}{2}$?
3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno v ravnini na območju $|x| + |y| \leq 1$.
 - (a) Zapiši gostoto slučajnega vektorja (X, Y) .
 - (b) Izračunaj robni porazdelitvi X in Y .
 - (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?
4. Življenska doba baterije X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ baterij izračunal vzorčno povprečje $\bar{X} = 1000$ ur in $\sum (X - \bar{X})^2 = 312500$ ur². V katerih mejah lahko leži a , da hipoteze $H_0 (E(X) = a)$ na stopnji zaupanja $\alpha = 0.05$ ne moremo zavrniti.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 19. 2. 2004

- V knjigarni prodajajo zvezke, ki se razlikujejo le po barvah: zelene, rdeče, rumene in modre. Tomaž potrebuje letos pet zvezkov.
 - Na koliko načinov si jih lahko izbere? (Pomoč: kombinacije s ponavljanjem.)
 - Na koliko načinov si jih lahko izbere, če jih želi imeti v dveh različnih barvah.
- Loterijski listek ima številke od 1 do 39, izmed katerih se potem naključno izžreba 7 različnih števil. Na listku prekrižamo 7 števil. Kolikšna je verjetnost, da zadenemo sedmico? Kolikšna je verjetnost, da so izžrebane natanko 4 številke, ki smo jih prekrižali?
- V posodi imamo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.
 - Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?
 - Iz druge posode na slepo prestavimo kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode izvlečemo kroglico ter opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve.
- Kovanec mečemo tako dolgo, da prvič pade grb, vendar največ petkrat. Število metov naj bo slučajna spremenljivka X .
 - Določi zalogo vrednosti slučajne spremenljivke X .
 - Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$, če veš, da smo metali pošten igralni kovanec.
 - V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben en met, 30-krat dva meta, 15-krat trije meti, 6-krat štirje meti in 4-krat pet metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec.
- Zvezna slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a(2 - |x|) & ; x \in [-2, 2] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Določi konstanto a in skiciraj graf gostote $p(x)$. Izračunaj še: $P(X \leq 1)$ in $E(X)$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA

Maribor, 19. 2. 2004

1. V knjigarni prodajajo zvezke, ki se razlikujejo le po barvah: zelene, rdeče, rumene in modre. Tomaž potrebuje letos pet zvezkov. Na koliko načinov si jih lahko izbere? Na koliko načinov si jih lahko izbere, če jih želi imeti v največ dveh različnih barvah.
2. Denimo, da je jutrišnje vreme odvisno le od današnjega: če je danes lepo bo tudi jutri lepo z verjetnostjo $\frac{2}{3}$, če pa je danes deževno, bo jutri dež z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Konec tedna se je pričel z lepim vremenom v petek. Kolikšna je verjetnost,
 - (a) da bosta tudi sobota in nedelja lepi,
 - (b) da bo lepo vreme tudi v ponedeljek, ne glede na vreme v soboto in nedeljo?
3. Na intervalu $[0, 3]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Kolikšna je verjetnost,
 - (a) da je manjše od obeh števil tudi manjše od 1,
 - (b) da je produkt obeh števil manjši od 1.
4. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X = 1$	$\frac{1}{20}$?	?
$X = 2$?	?	?

Dopolni tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Zapiši tudi njuni porazdelitvi!

5. Kovanec mečemo tako dolgo, da prvič pade grb. Število metov, ki so za to potrebni je slučajna spremenljivka X .
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X , če smo metali pošten kovanec? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!
 - (b) V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben en met, 30-krat dva meta, 15-krat trije meti, 6-krat štirje meti, 2-krat pet metov in 2-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 19. 2. 2004

- V knjigarni prodajajo zvezke štirih različnih barv: zelene, rdeče, rumene in modre. Zvezki se razlikujejo le po barvah, vseh pa imajo na zalogi dovolj. Tomaž potrebuje letos pet zvezkov.
 - Na koliko načinov si jih lahko izbere?
 - Na koliko načinov si jih lahko izbere, če jih želi imeti v dveh različnih barvah.
- Denimo, da je jutrišnje vreme odvisno le od današnjega: če je danes lepo bo tudi jutri lepo z verjetnostjo $\frac{2}{3}$, če pa je danes deževno, bo jutri dež z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Konec tedna se je pričel z lepim vremenom v petek. Kolikšna je verjetnost,
 - da bosta tudi sobota in nedelja lepi,
 - da bo lepo vreme tudi v ponedeljek, ne glede na vreme v soboto in nedeljo?
- Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Naj bo X razdalja med njima.
 - Izračunaj verjetnost dogodka, da je $X \leq \frac{1}{3}$.
 - Kako je porazdeljena zvezna slučajna spremenljivka X ? Izračunaj naprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato gostoto porazdelitve!
 - Kolikšna je povprečna razdalja med točkama?
- Kovanec mečemo tako dolgo, da prvič pade grb. Število metov, ki so za to potrebni je slučajna spremenljivka X .
 - Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X , če smo metali pošten kovanec? Zapiši tudi njeno rodovno funkcijo in izračunaj $E(X)$.
 - V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben en met, 30-krat dva meta, 15-krat trije meti, 6-krat štirje meti, 2-krat pet metov in 2-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 19. 2. 2004

- V knjigarni prodajajo zvezke štirih različnih barv: zelene, rdeče, rumene in modre. Zvezki se razlikujejo le po barvah, vseh pa imajo na zalogi dovolj. Tomaž potrebuje letos pet zvezkov. Na koliko načinov si jih lahko izbere? Na koliko načinov si jih lahko izbere, če jih želi imeti v največ dveh različnih barvah.
- Kovanec mečemo tako dolgo, da prvič pade grb. Število metov, ki so za to potrebni je slučajna spremenljivka X .
 - Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X , če smo metali pošten kovanec? Zapiši tudi njeno rodovno funkcijo in izračunaj $E(X)$.
 - V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben en met, 30-krat dva meta, 15-krat trije meti, 6-krat štirje meti, 2-krat pet metov in 2-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec.
- Na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ naključno izberemo točko. Označimo z X in Y koordinati izbrane točke in definiramo $Z = |X - Y|$.
 - Izračunaj $P(Z \leq \frac{1}{3})$.
 - Določi gostoto slučajne spremenljivke Z .
 - Izračunaj $E(Z)$ in najdi tak z , da bo $P(Z \leq z) = P(Z \geq z)$.
- Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X = 1$	$\frac{1}{20}$?	?
$X = 2$?	?	?

- Dopolni tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Zapiši tudi njuni porazdelitvi!
- Izračunaj $E(XY^2)$. Upoštevaj, da sta X in Y neodvisni!

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11. 5. 2004

- V posodi imamo šest belih in štiri črne kroglice, v drugi pa eno belo eno črno. Najprej na slepo premestimo tri kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici. Obe sta črni. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice črne?
- Na daljici z dolžino 6 *cm* naključno in neodvisno izberemo dve točki. Označimo dogodka:
A- točki sta od razpolovišča daljice oddaljeni več kot 1 *cm*,
B- razdalja med točkama je vsaj 3 *cm*.
Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A \cup B)$.
- Dana so števila 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Naključno hkrati izberemo 3 števila. Največje število izmed izbranih je slučajna spremenljivka X .
 - Katere vrednosti zavzame slučajna spremenljivka X ?
 - Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X .
 - Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
 - Meritve neke količine, porazdeljene normalno $N(a, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti
97, 95, 104, 91, 99, 95, 97, 91, 95;
Testiraj hipotezo, da je $a = 100$, proti alternativni hipotezi $a \neq 100$. Stopnja značilnosti naj bo 0.05.
 - Za to količino porazdeljeno normalno $N(a, \sigma)$ smo na vzorcu $n = 400$ izračunali vzorčno povprečje $\bar{x} = 102$ in izračunali $\sum (x_k - \bar{x})^2 = 4000$. Testiraj hipotezo, da je $a = 100$, proti alternativni hipotezi $a \neq 100$. Stopnja značilnosti naj bo 0.01.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11. 5. 2004

1. Strelca streljata na tarčo, ki jo prvi zadene z verjetnostjo $\frac{3}{4}$, drugi pa z verjetnostjo $\frac{2}{3}$. Vsak po dvakrat ustrelita proti cilju. Izračunaj pogojno verjetnost dogodka, da sta oba zadela tarčo, če sta bila v tarči 2 zadetka.
2. Na daljici z dolžino 6 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Označimo dogodka:
A- točki sta od razpolovišča daljice oddaljeni več kot 1 cm,
B- razdalja med točkama je vsaj 3 cm.
Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A \cup B)$ in $P(A|B)$.
3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$.
 - (a) Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X - Y$.
 - (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke Z .
4. Igralno kocko mečemo tako dolgo, da prvič pade ena ali šest. Število metov, ki so za to potrebni je slučajna spremenljivka X .
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X , če smo metali pošteno igralno kocko? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!
 - (b) V 81 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 30-krat je bil potreben en met, 20-krat dva meta, 12-krat trije meti, 8-krat štirje meti, 5-krat pet metov in 6-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11. 5. 2004

1. Strelca streljata na tarčo, ki jo prvi zadene z verjetnostjo $\frac{3}{4}$, drugi pa z verjetnostjo $\frac{2}{3}$. Vsak po dvakrat ustrelita proti cilju. Izračunaj pogojno verjetnost dogodka, da sta oba zadela tarčo, če sta bila v tarči 2 zadetka.
2. Palico dolžine l naključno in neodvisno dvakrat prelomimo in dobimo 3 dele. Izračunaj verjetnost, da so dolžine vseh treh delov palice manjše od $\frac{5}{12}l$.
3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$.
 - (a) Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X - Y$.
 - (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke Z .
4. Igralno kocko mečemo tako dolgo, da prvič pade ena ali šest. Število metov, ki so za to potrebni, je slučajna spremenljivka X .
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X , če smo metali pošteno igralno kocko? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!
 - (b) V 81 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 30-krat je bil potreben en met, 20-krat dva meta, 12-krat trije meti, 8-krat štirje meti, 5-krat pet metov in 6-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 11. 5. 2004

1. V posodi imamo šest belih in štiri črne kroglice, v drugi pa eno belo eno črno. Najprej na slepo premestimo tri kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici. Obe sta črni. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice črne?
2. Verjetnost, da potapljač pri potopu najde biser, je 0.2. Slučajna spremenljivka X meri število potopov, ki so potrebni, da potapljač nabere 80 biserov.
 - (a) Kako je porazdeljena X ? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo.
 - (b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
 - (c) Oцени verjetnost, da se bo moral potapljač potopiti več kot 500-krat, da nabere 80 biserov. (Normalna aproksimacija!)

3. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen z gostoto

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2}\varphi & ; \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & ; \varphi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} .$$

Naj slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši njeno gostoto!

4. Slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y} & ; x, y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Izračunaj robno gostoto $p_X(x)$ in določi regresijo $E(Y|X)$.

5. Na avtomatu za polnjenje sladkorja v vrečke piše, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 1 kg enak 0.02 kg. Na vzorcu 16-tih vrečk so ugotovili vzorčno povprečje $\bar{x} = 1.025$ in izračunali $\sum (x_k - \bar{x})^2 = 0.015$. Na osnovi teh podatkov in stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezi:

$H_0(a = 1)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 1)$ in

$H_0(\sigma = 0.02)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\sigma \neq 0.02)$.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 6. 2004

1. Pipi in Melhijad, mali in veliki pujs, se igrata nenavadno igrico. Pipi stoji na stolu in vrže bučo v Melhijada. Buča se razleti na velike, srednje in majhne kose, pri čemer je velikih kosov 10%, srednjih 30% in majhnih 60%. Koščki buče se odbijejo nazaj proti Pipiju. Ob zadetku veliki kos prevrne Pipija z verjetnostjo 0.9, srednji ga prevrne z verjetnostjo 0.2 in majhen kos buče ga prevrne z verjetnostjo 0.05. Pipija zadene natanko en kos buče in nesrečni Pipi se zvrne s stola. Kolikšna je verjetnost, da ga je prevrnil srednje velik kos buče?
2. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Vrednost slučajne spremenljivke X naj vsota pik na obeh kockah in vrednost slučajne spremenljivke Y je večje število pik na obeh kockah.
 - (a) Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y) ? Zapiši njegovo verjetnostno tabelo!
 - (b) Določi porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y . Ali sta X in Y neodvisni?
 - (c) Določi porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X - Y$ in izračunaj $E(Z)$.
3. Na nevarnem gozdnem odseku dolžine 1 km se pogosto podirajo drevesa. Če drevo pade na cesto, le-ta ni več prevozna od točke nesreče naprej. Razdalja prevoznosti poti do zapore naj bo podana s slučajno spremenljivko X , katere gostota je $p(x) = ax(1 - x^2)$ za $x \in [0, 1]$.
 - (a) Določi a tako, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$.
 - (b) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0.5 km poti in smo že prevozili 0.2 km nevarnega odseka. Določi verjetnost, da bo cesta prevozna do našega odcepa.
4. Prodajalec žarnic zagotavlja, da je njihova povprečna življenska doba 800 ur. Pred nakupom testiramo 36 primerkov žarnic in ugotovimo, da v povprečju trajajo 784 ur s standardnim odklonom 70 ur. Se to sklada s prodajalčevo napovedjo? Se lahko na osnovi preizkušene vzorca s 5% tveganjem odločimo za nakup?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 6. 2004

1. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Za vsako naravno število n označimo z A_n dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva z n .
 - (a) Izračunaj verjetnost dogodkov A_2 in A_5 . Ali sta dogodka A_5 in A_2 neodvisna?
 - (b) Izračunaj pogojno verjetnost, da sta na prvi kocki padli dve piki, če je bila vsota pik deljiva s 5.
2. Dva roparja sta se odločila, da bosta na "delo" odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne ujamejo pri kraji. Pri tem so posamezni ropi med sabo neodvisni. Prvega roparja ujamejo z verjetnostjo p_1 , drugega roparja pa z verjetnostjo p_2 . Prvi začne z ropi prvi ropar.
 - (a) Kolikšna je verjetnost, da bodo prvega roparja pri delu ujeli prej kot drugega?
 - (b) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši verjetnostno funkcijo in izračunaj tudi njeno matematično upanje.
3. Nad daljico AB dolžine l z razpoloviščem S narišemo polkrog s središčem S . Na polkrogu naključno izberemo točko C . Naj slučajna spremenljivka X meri ploščino ΔABC .
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto!
 - (b) Kolikšna je povprečna ploščina ΔABC ?
4. Povprečna življenska doba 100 naključno izbranih žarnic je 1570 *ur* s standardnim odklonom 120 *ur*.
 - (a) Preveri hipotezo, da je povprečna življenska doba žarnic v celotni proizvodnji 1600 *ur* ($H_0 (a = 1600)$ proti $H_1 (a \neq 1600)$) pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.95$.
 - (b) Preveri hipotezo $H_0 (a \leq 1600)$ proti $H_1 (a > 1600)$ pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.95$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 8. 6. 2004

1. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Za vsako naravno število n označimo z A_n dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva z n .
 - (a) Izračunaj verjetnost dogodkov A_2 in A_5 . Ali sta dogodka A_5 in A_2 neodvisna?
 - (b) Izračunaj pogojno verjetnost, da sta na prvi kocki padli dve piki, če je bila vsota pik deljiva s 5.
2. Dva roparja sta se odločila, da bosta na "delo" odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne ujamejo pri kraji. Pri tem so posamezni ropi med sabo neodvisni. Prvega roparja ujamejo z verjetnostjo p_1 , drugega roparja pa z verjetnostjo p_2 . Prvi začne z ropi prvi ropar.
 - (a) Kolikšna je verjetnost, da bodo prvega roparja pri delu ujeli prej kot drugega?
 - (b) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši verjetnostno funkcijo in izračunaj tudi njeno matematično upanje.
3. Na nevarnem gozdnem odseku dolžine 1 km se pogosto podirajo drevesa. Če drevo pade na cesto, le-ta ni več prevozna od točke nesreče naprej. Razdalja prevoznosti poti do zapore naj bo podana s slučajno spremenljivko X , katere gostota je $p(x) = ax(1 - x^2)$ za $x \in [0, 1]$.
 - (a) Določi a tako, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$.
 - (b) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0.5 km poti in smo že prevozili 0.2 km nevarnega odseka. Določi verjetnost, da bo cesta prevozna do našega odcepa.
4. Prodajalec žarnic zagotavlja, da je njihova povprečna življenska doba 800 ur . Pred nakupom testiramo 36 primerkov žarnic in ugotovimo, da v povprečju trajajo 784 ur s standardnim odklonom 70 ur . Se to sklada s prodajalčevo napovedjo? Se lahko na osnovi preizkušene vzorca s 5% tveganjem odločimo za nakup?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 6. 2004

1. Andrej, Bojan, Ciril in Damjan streljajo v tarčo. Andrej in Bojan streljata z rdečimi, Ciril in Damjan pa z modrimi puščicami. Andrej zadene tarčo z verjetnostjo 0.6, Bojan z verjetnostjo 0.7, Ciril z verjetnostjo 0.5 in Damjan z verjetnostjo 0.9. Vsi hkrati neodvisno drug od drugega ustrelijo proti tarči. Naj bo A dogodek, da sta tarčo zadeli ena rdeča in ena modra puščica in B dogodek, da sta samo Bojan in Ciril zadela tarčo. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.
2. Dve ladji bosta na določen dan pripluli v pristanišče, pripluli bosta neodvisno in ob enakomerno porazdeljenem času med 00.00 in 24.00. Pri tem bo prva ladja ostala v pristanišču 2 uri, druga pa 4 ure. Kolikšna je verjetnost, da bosta obe ladji hkrati v pristanišču?
3. Andrej in Borut igrata karte. Andrej dobi igro z verjetnostjo $\frac{1}{3}$, Borut pa z verjetnostjo $\frac{2}{3}$. Igrata dokler eden od njiju ne dobi štirih iger. Naj bo X število iger, ki jih je dobil Andrej. Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke X ! Predpostavimo, da so igre med seboj neodvisne.
4. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{ax}{1+x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} .$$

Določi konstanto a , da bo F_X res porazdelitvena funkcija in izračunaj verjetnosti $P(X \geq 1)$ in $P(-1 \leq X \leq 2)$.

5. Istočasno vržemo 5 enakih poštenih kovancev in štejemo število padlih grbov. V tabeli so rezultati po 320-tih metih, kjer je x_j število metov v katerih se je pojavilo m_j grbov.

x_j	0	1	2	3	4	5
m_j	7	41	98	114	54	6

S χ^2 testom na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da je število grbov porazdeljeno binomsko $b(5, \frac{1}{2})$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 6. 2004

1. V prvi posodi sta 2 beli, 7 rdečih in 3 črne kroglice, v drugi pa 3 bele, 5 rdečih in 5 črnih kroglic. Najprej na slepo prenesemo 2 kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo 4 kroglice. Naj bo A dogodek, da smo iz prve v drugo posodo prenesli 2 rdeči kroglici in B dogodek, da smo na koncu izvlekli 1 belo, 1 črno in 2 rdeči kroglici. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.
2. Na stranicah kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$, ki ne ležita na koordinatnih oseh izberemo na slepo dve točki X in Y , na vsaki stranici po eno. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika ΔOXY manjša od $\frac{1}{4}$?
3. Igralni kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je p , mečemo, dokler ne pade najprej cifra, takoj za njo pa še grb. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število grbov, ki so za to potrebni. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X !
4. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \frac{a}{1 + e^{-x}}.$$

Določi konstanto a , da bo F_X res porazdelitvena funkcija in izračunaj verjetnost $P(0 < X \leq 1)$.

5. V tovarni industrijskih termometrov so naključno izbrali 1000 termometrov in pri vsakem izmerili za koliko $^{\circ}C$ termometer odstopa pri merjenju temperature. Dobljeni rezultati so predstavljeni v tabeli

x_j	0	1	2	3	4	5 in več
n_j	220	330	261	121	55	13

S χ^2 testom na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da je odstopanje porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\mathcal{P}(\lambda)$ (t.j. $p_n = \frac{1}{n!}\lambda^n e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, \dots$), kjer je $\lambda = 1.5$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 6. 2004

1. Andrej, Bojan, Ciril in Damjan streljajo v tarčo. Andrej in Bojan streljata z rdečimi, Ciril in Damjan pa z modrimi puščicami. Andrej zadene tarčo z verjetnostjo 0.6, Bojan z verjetnostjo 0.7, Ciril z verjetnostjo 0.5 in Damjan z verjetnostjo 0.9. Vsi hkrati neodvisno drug od drugega ustrelijo proti tarči. Naj bo A dogodek, da sta tarčo zadeli ena rdeča in ena modra puščica in B dogodek, da sta samo Bojan in Ciril zadela tarčo. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.
2. Na stranicah kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$, ki ne ležita na koordinatnih oseh izberemo na slepo dve točki X in Y , na vsaki stranici po eno. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika ΔOXY manjša od $\frac{1}{4}$?
3. Andrej in Borut igrata karte. Andrej dobi igro z verjetnostjo $\frac{1}{3}$, Borut pa z verjetnostjo $\frac{2}{3}$. Igrata dokler eden od njiju ne dobi štirih iger. Naj bo X število iger, ki jih je dobil Andrej. Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke X ! Predpostavimo, da so igre med seboj neodvisne.
4. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{ax}{1 + |x|}.$$

Določi konstanto a , da bo F_X res porazdelitvena funkcija in izračunaj verjetnosti $P(X \geq 1)$ in $P(-1 \leq X \leq 2)$.

5. V tovarni industrijskih termometrov so naključno izbrali 1000 termometrov in pri vsakem izmerili za koliko $^{\circ}C$ termometer odstopa pri merjenju temperature. Dobljeni rezultati so predstavljeni v tabeli

x_j	0	1	2	3	4	5 in več
n_j	220	330	261	121	55	13

S χ^2 testom na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da je odstopanje porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\mathcal{P}(\lambda)$ (t.j. $p_n = \frac{1}{n!}\lambda^n e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, \dots$), kjer je $\lambda = 1.5$.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 8. 2004

1. V prvi posodi sta 2 beli, 3 rdeče in 3 črne kroglice, v drugi pa 3 bele, 2 rdeči in 1 črna kroglica. Najprej na slepo prenesemo 2 kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo 3 kroglice. Naj bo A dogodek, da smo iz prve v drugo posodo prenesli 2 rdeči kroglici in B dogodek, da smo na koncu izvlekli 1 belo in 2 rdeči kroglici. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.

2. Na daljici \overline{AB} naključno izberemo dve točki. Označimo naslednje dogodke:

A : vsota oddaljenosti točk od bližnjega krajišča je manjša od medsebojne razdalje;

B : izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice \overline{AB} .

Kolikšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$ in $P(A|B)$?

3. Andrej in Borut igrata karte. Andrej dobi igro z verjetnostjo $\frac{1}{4}$, Borut pa z verjetnostjo $\frac{3}{4}$. Igrata dokler eden od njiju ne dobi štirih iger. Naj bo X število iger, ki jih je dobil Andrej. Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke X ! Predpostavimo, da so igre med seboj neodvisne.

4. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto $p(x) = ae^{-|x|}$.

(a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ in določi a tako, da bo $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X .

(b) Kakšna je verjetnost $P(-1 \leq X \leq 1)$ in $E(X)$?

5. Izmed prvih 800 cifer števila π so se cifre 0, 1, 2, ..., 9 pojavile po vrsti

74, 92, 79, 80, 77, 75, 76, 91, 82, 74

krat. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da imajo vse cifre enako verjetnost pojavljanja.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 8. 2004

1. V škatli je m belih in n črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili beli. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila črna kroglica?
2. Igralca izmenično mečeta kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{3}$. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb in zasluži toliko tolarjev kolikokrat sta metala. Število zasluženih tolarjev naj bo slučajna spremenljivka X . Zapiši verjetnostno in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X pri igralcu, ki je bil drugi na potezi. Kolikšen je njegov povprečni zaslužek?
3. Točko T izberemo slučajno na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Slučajna spremenljivka X meri oddaljenost točke T od izhodišča. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve.
4. Najprej vržemo pošteno igralno kocko nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Število padlih pik naj bo vrednost slučajne spremenljivke X , število padlih grbov pa vrednost slučajne spremenljivke Y .
 - (a) Kako je porazdeljen diskretni slučajni vektor (X, Y) ? Določi robni porazdelitvi X in Y !
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da padeta vsaj dva grba, če so padle vsaj tri pike?
5. Življenska doba žarnic X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ žarnic izračunal vzorčno povprečje $\bar{X} = 1000$ ur in $\sum (X - \bar{X})^2 = 312500$ ur². V katerih mejah lahko leži a , da hipoteze $H_0 (E(X) = a)$ na stopnji zaupanja $\alpha = 0.05$ ne moremo zavriniti?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 8. 2004

1. V škatli je m belih in n črnih kroglic. Iz škatle je padla ena kroglica. Da bi ugotovili, kakšna kroglica se je izgubila, smo naključno in neodvisno iz škatle izbrali dve kroglici. Obe sta bili beli. Kakšna je verjetnost, da se je izgubila črna kroglica?

2. Na daljici \overline{AB} naključno izberemo dve točki. Označimo naslednje dogodke:

A : vsota oddaljenosti točk od bližnjega krajišča je manjša od medsebojne razdalje;

B : izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice \overline{AB} .

Kolikšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$ in $P(A|B)$?

3. Igralca izmenično mečeta kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{3}$. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb in zasluži toliko tolarjev kolikokrat sta metala. Število zasluženih tolarjev naj bo slučajna spremenljivka X . Zapiši verjetnostno in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X pri igralcu, ki je bil drugi na potezi. Kolikšen je njegov povprečni zaslužek?

4. Najprej vržemo pošteno igralno kocko nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Število padlih pik naj bo vrednost slučajne spremenljivke X , število padlih grbov pa vrednost slučajne spremenljivke Y .

(a) Kako je porazdeljen diskretni slučajni vektor (X, Y) ? Določi robni porazdelitvi X in Y !

(b) Kolikšna je verjetnost, da padeta vsaj dva grba, če so padle vsaj tri pike?

5. Izmed prvih 800 cifer števila π so se cifre 0, 1, 2, ..., 9 pojavile po vrsti

74, 92, 79, 80, 77, 75, 76, 91, 82, 74

krat. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da imajo vse cifre enako verjetnost pojavljanja.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 7. 9. 2004

- V posodi imamo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa pet belih, sedem modrih in pet črnih kroglic.
 - Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?
 - Iz prve posode na slepo prestavimo kroglico v drugo posodo. Nato iz druge posode naključno izvlečemo kroglico, ki je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prestavljena kroglica modre barve?
- Vprašalnik ima 10 vprašanj. Na vsako od njih ponuja pet odgovorov, trije so napačni in dva pravilna. Naključno izberemo en odgovor na vsako vprašanje. Število pravih odgovorov je slučajna spremenljivka X .
 - Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke X .
 - Zapiši rodovno funkcijo $G_X(t)$ in s pomočjo nje izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
- Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x+1} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} .$$

Določi konstanto a tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija, izračunaj gostoto slučajne spremenljivke X in verjetnost $P(X \geq 1)$.

- Center republike Slovenije za obveščanje je skozi celo leto beležil število požarov, ki so izbruhnili v državi. Dobljeni rezultati so v tabeli:

Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
60	45	35	50	75	90	65

Ali lahko pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnamo hipotezo, da je pojavljanje požarov neodvisno od dneva?

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RUČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 7. 9. 2004

1. V cvetličarni prodajajo vrtnice, ki se razlikujejo le po barvah: bele, rdeče, rumene in modre. Andrej potrebuje za šopek pet vrtnic. Na koliko načinov mu v cvetličarni lahko sestavijo šopek? Kolikšna je verjetnost, da so mu sestavili dvobarvni šopek, če predpostavimo, da so vsi različni sestavi enakovrjetni?
2. Na poti leta vohunskega letala je n radarjev. Verjetnost, da posamezni radar ne odkrije letala, je p . Naj slučajna spremenljivka X_n meri število radarjev, ki jih je letalo preletelo, dokler ga niso odkrili.
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X_n ? Zapiši njeno verjetnostno in porazdelitveno funkcijo!
 - (b) Zapiši rodovno funkcijo $G_{X_n}(t)$ in izračunaj $E_n(X)$.
 - (c) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(X)$.
3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F_X(x) = \begin{cases} a - e^{-2x} & ; x \geq 0 \\ b & ; x < 0 \end{cases} .$$
 - (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija ter skiciraj njen graf.
 - (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X in $P(1 \leq X < 2)$.
 - (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?
4. Igralno kocko mečemo tako dolgo, da prvič padeta dve ali tri pike. V 81 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 30-krat je bil potreben en met, 20-krat dva meta, 12-krat trije meti, 8-krat štirje meti, 5-krat pet metov in 6-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko.

Naloge so enakovredne.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 7. 9. 2004

1. V cvetličarni prodajajo vrtnice, ki se razlikujejo le po barvah: bele, rdeče, rumene in modre. Andrej potrebuje za šopek pet vrtnic. Na koliko načinov mu v cvetličarni lahko sestavijo šopek? Kolikšna je verjetnost, da so mu sestavili dvobarvni šopek, če predpostavimo, da so vsi različni sestavi enakoverjetni?
2. V posodi imamo 3 bele in 1 rdečo kroglico. Naključno izberemo kroglico in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka T meri število izbir, ki so potrebne, da sta izbrani kroglici obeh barv.
 - (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T ?
 - (b) Izračunaj rodovno funkcijo $G_T(t)$ in matematično upanje $E(T)$.
3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} a - e^{-2x} & ; x \geq 0 \\ b & ; x < 0 \end{cases} .$$

- (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija ter skiciraj njen graf.
 - (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X in $P(1 \leq X < 2)$.
 - (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?
4. Center republike Slovenije za obveščanje je skozi celo leto beležil število požarov, ki so izbruhnili v državi. Dobljeni rezultati so v tabeli:

Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
60	45	35	50	75	90	65

Ali lahko pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnamo hipotezo, da je pojavljanje požarov neodvisno od dneva?