Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 3. 2. 2005

1. Poštar razdeli 5 pisem na slepo v 5 poštnih predalov, v vsak predal po eno pismo. Slučajna spremenljivka X meri število pisem na pravem naslovu. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj povprečno število pisem na pravem naslovu!

2. Na daljici z dolžino 12 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Označimo dogodka:

   A- točki sta od razpolovišča daljice oddaljeni več kot 2 cm,

   B- razdalja med točkama je vsaj 6 cm.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A), P(B), P(AB), P(A \cup B)$ in $P(A|B)$.

3. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Število padlih pik na prvi kocki je vrednost slučajne spremenljivke X in število pik na drugi kocki naj bo vrednost Y. Zapiši porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y)! Kolikšna je verjetnost, da ima kvadratna enačba $x^2 + Xx + Y = 0$ realne ničle?

   (a) Meritve neke količine, porazdeljene normalno $N(a, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti

   $$97, 95, 104, 91, 99, 95, 97, 91, 95;$$

   Testiraj hipotezo, da je $a = 100$, proti alternativni hipotezi $a \neq 100$. Stopnja značilnosti naj bo 0.05.

   (b) Za to količino porazdeljeno normalno $N(a, \sigma)$ smo na vzorcu $n = 400$ izračunali vzorčno povprečje $\overline{x} = 102$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 4000$. Testiraj hipotezo, da je $a = 100$, proti alternativni hipotezi $a \neq 100$. Stopnja značilnosti naj bo 0.01.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 3. 2. 2005

1. V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi 2 beli in 1 črno in v tretji posodi 1 belo in 2 črni. Iz prve posode naključno prenesemo 2 kroglici v drugo posodo, nato iz druge posode na slepo prenesemo 2 kroglici v tretjo in nazadnje iz tretje prenesemo 2 kroglici v prvo posodo. Naj slučajna spremenljivka X meri število belih kroglic v prvi posodi. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X. Kolikšno je povprečno število belih kroglic v prvi posodi?

2. Na daljici z dolžino 12 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Označimo dogodka:

   A- točki sta od razpolovišča daljice oddaljeni več kot 2 cm,

   B- razdalja med točkama je vsaj 6 cm.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A), P(B), P(AB), P(A \cup B)$ in $P(A|B)$.

3. Točka T leži nekje v kvadratu $[0,1] \times [0,1]$, in sicer je verjetnost za to, da pri danih $a, b \in [0,1]$ leži točka v kvadratu $[0,a] \times [0,b]$ enaka
$$\frac{1}{7}ab\left(2a^2 + 3ab + 2b^2\right).$$
   Kolikšna je verjetnost, da je točka T od izhodišča $(0,0)$ oddaljena manj od 1?

4. Igralno kocko mečemo tako dolgo, da drugič pade pet ali šest. Število metov, ki so za to potrebni je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X, če smo metali pošteno igralno kocko? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!

   (b) V 729 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 100-krat sta bila potrebna dva meta, 120-krat trije meti, 90-krat štirje meti, 80-krat pet metov, 85-krat šest metov in 254-krat sedem ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošteno igralno kocko.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 18. 2. 2005

1. V posodi imamo 5 belih in 4 črne kroglice, v drugi pa dve beli in eno črno. Najprej na slepo premestimo tri kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici. Obe sta beli. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice črne?

2. Dana so števila $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Hkrati izberemo 4 števila. Najmanjše število izmed izbranih je slučajna spremenljivka X. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$.

3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{ax-1}{x+1} & ; \ x \geq 1 \\ b & ; \ x < 1 \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija.
   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučane spremenljivke X in $P[-2 < X < 2]$.
   (c) Izračunaj mediano in matematično upanje, če obstaja.

4. Življenska doba baterije X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ baterij izračunal vzorčno povprečje $\overline{X} = 1000\ ur$ in $\sum \left(X - \overline{X}\right)^2 = 312500\ ur^2$. V katerih mejah lahko leži a, da hipoteze $H_0(E(X) = a)$ na stopnji zaupanja $\alpha = 0.05$ ne moremo zavrniti.

Naloge so enakovredne. Dominik Benkovič

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 18. 2. 2005

1. V posodi imamo pet belih, tri zelene in štiri črne kroglice. Soigralec iz posode najprej izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče na slepo še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kakšna je verjetnost, da je bila prva kroglica bele barve?

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$ vsota teh števil je manjša od 2;

   $B-$ vsota prvih dveh števil, je večja od tretjega;

   $C-$ z daljicami izbranih dolžin lahko sestavimo trikotnik.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ in $P(C|A)$.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto verjetnosti

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)\,e^{-x-y} & ;\ x, y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

   Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$? Kolikšno je njeno matematično upanje in kolikšna je njena disperzija?

4. Podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	10 − 20	20 − 30	30 − 40	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25, 10)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 15. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Trikrat vržemo pošteno igralno kocko. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A : dobimo zaporedje pik 1, 3 in 5 v tem vrstnem redu; (**8**)

   B : dobimo vrednosti 1, 3 in 5 ne glede na vrstni red; (**8**)

   C : dobimo sama soda števila pik. (**9**)

---

2. V posodi imamo 3 poštene kovance in 2 kovanca, ki imata na obeh straneh grb. Na slepo iz posode izvlečemo dva kovanca in ju vržemo.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je na obeh kovancih padel grb? (**15**)

   (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz posode izvlekli dva poštena kovanca, če je na obeh padel grb? (**10**)

3. Točko T izberemo naključno na krogu $x^2 + y^2 \leq 4$. Slučajna spremenljivka X meri oddaljenost točke T od izhodišča $(0, 0)$.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! **(15)**

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. **(10)**

4. (a) Naenkrat vržemo tri poštene igralne kovance. Število padlih grbov je vrednost slučajne spremenljivke X. Zapiši in poimenuj njeno porazdelitev! **(10)**

(b) V igralnici se pri igri na srečo istočasno mečejo trije kovanci, ki so po zagotovilu igralnice pošteni. Število grbov x_j in njihova frekvenca m_j pri 80-tih metih je podana v tabeli:

x_j	0	1	2	3
m_j	6	21	38	15

.

Ali lahko na osnovi teh podatkov s 5% tveganjem zavrnemo hipotezo o poštenosti igralnih kovancev? **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 15. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Poštena igralna kocka ima tri ploskve pobarvane z rdečo, dve z zeleno in eno z belo barvo. Kocko vržemo petkrat. Kolikšna je verjetnost dogodka, da bo padla na rdečo in zeleno ploskev enakokrat? **(25)**

---

1. V posodi imamo 4 poštene kovance in 3 kovance, ki imajo na obeh straneh grb. Na slepo iz posode izvlečemo dva kovanca in ju vržemo. Število padlih grbov je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! **(15)**

   (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz posode izvlekli dva poštena kovanca, če je na obeh padel grb? **(10)**

3. Točko T izberemo naključno na krogu $x^2 + y^2 \leq a^2$. Slučajna spremenljivka X meri oddaljenost točke T od krožnice $x^2 + y^2 = a^2$.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**15**)

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. (**10**)

4. Tovarna jamči, da je delež izdelkov z napako enak 20%. Torej verjetnost, da ima naključno izbrani izdelek napako, je 0.2.

   (a) Kolikšna je ocena verjetnosti, da je izmed 100 naključno izbranih izdelkov največ 15 izdelkov, ki imajo napako. Uporabi Laplaceovo integralsko formulo!(**10**)

   (b) V vzorcu 100 izdelkov jih je imelo napako 26. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.15$ testiraj hipotezo, da je verjetnost, da ima izdelek napako, enaka 0.2, proti alternativni hipotezi, da verjetnost ni 0.2. (**15**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 15. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V posodi imamo 4 poštene kovance in 3 kovance, ki imajo na obeh straneh grb. Na slepo iz posode izvlečemo dva kovanca in ju vržemo. Število padlih grbov je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! **(15)**

   (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz posode izvlekli dva poštena kovanca, če je na obeh padel grb? **(10)**

---

2. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo vsota pik na obeh kockah in vrednost slučajne spremenljivke Y je absolutna razlika števila pik na obeh kockah.

   (a) Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši njegovo verjetnostno tabelo! (**15**)

   (b) Določi robni porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y. Ali sta X in Y neodvisni? (**5**)

   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$. (**5**)

3. Na stranici AB, dolžine a, kvadrata $ABCD$ naključno izberemo točko E.Vrednost slučajne spremenljivke X je dolžina daljice CE.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**10**)

   (b) Izračunaj verjetnost $P\,[X \geq 4a/3]$. (**8**)

   (c) Izračunaj mediano in semiinterkvartilni razmik slučajne spremenljivke X. (**7**)

4. Tovarna jamči, da je delež izdelkov z napako enak 20%. Torej verjetnost, da ima naključno izbrani izdelek napako, je 0.2.

   (a) Kolikšna je ocena verjetnosti, da je izmed 100 naključno izbranih izdelkov največ 15 izdelkov, ki imajo napako. Uporabi Laplaceovo integralsko formulo!(**10**)

   (b) V vzorcu 100 izdelkov jih je imelo napako 26. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.15$ testiraj hipotezo, da je verjetnost, da ima izdelek napako, enaka 0.2, proti alternativni hipotezi, da verjetnost ni 0.2. (**15**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 15. 6. 2005

1. V posodi imamo 4 poštene kovance in 3 kovance, ki imajo na obeh straneh grb. Na slepo iz posode izvlečemo dva kovanca in ju vržemo. Število padlih grbov je slučajna spremenljivka X.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!
   (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz posode izvlekli dva poštena kovanca, če je na obeh padel grb?

2. Slučajni spremenljiki X in Y sta neodvisni. Slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2x}{3-x}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = \left(2e^{it} - 1\right)^{-1}$.
   (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y?
   (b) Zapiši karakteristično funkcijo in porazdelitev spremenljivke $Z = X + Y$.

3. Na stranici AB, dolžine a, kvadrata $ABCD$ naključno izberemo točko E.Vrednost slučajne spremenljivke X je dolžina daljice CE.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto!
   (b) Izračunaj verjetnost $P[X \geq 4a/3]$.
   (c) Izračunaj mediano in semiinterkvartilni razmik slučajne spremenljivke X.

4. Tovarna jamči, da je delež izdelkov z napako enak 20%. Torej verjetnost, da ima naključno izbrani izdelek napako, je 0.2.
   (a) Kolikšna je ocena verjetnosti, da je izmed 100 naključno izbranih izdelkov največ 15 izdelkov, ki imajo napako.
   (b) V vzorcu 100 izdelkov jih je imelo napako 26. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.15$ testiraj hipotezo, da je verjetnost, da ima izdelek napako, enaka 0.2, proti alternativni hipotezi, da verjetnost ni 0.2.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 29. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Oče želi sinčku za darilo kupiti 6 avtomobilčkov. Vsi avtomobilčki so enakega tipa, razlikujejo se le po barvi.

   (a) Recimo, da lahko oče izbira med rdečimi, belimi, rumenimi in zelenimi avtomobilčki. Na koliko različnih načinov lahko sestavi darilo iz 6 avtomobilčkov, če je na razpolago poljubno mnogo avtomobilčkov vsake barve? (**10**)

   (b) Na koliko načinov lahko oče obdari sina, če je na razpolago le 5 avtomobilčkov vsake barve? (**10**)

---

2. Janez pošilja Katarini kodirana sporočila v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico 2/5 oddanih pik in se spremeni v piko 1/3 oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal 62.5% pik.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da prvi znak v prejetem sporočilu črta? (**15**)

   (b) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal? (**10**)

3. Iz kvadrata $[0,1] \times [0,1]$ naključno izberemo točko T. Slučajna spremenljivka X meri oddaljenost izbrane točke do najbližje koordinate osi.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**15**)

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. (**10**)

4. Igralni kovanec mečemo tako dolgo, da drugič pade grb. Število metov, ki so za to potrebni, je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X, če smo metali pošten igralni kovanec? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! **(15)**

   (b) V 640 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 180-krat sta bila potrebna dva meta, 170-krat trije meti, 100-krat štirje meti, 90-krat pet metov, 40-krat šest metov in 60-krat sedem ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec. **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 29. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Vržemo tri kovance. Predpostavimo, da so meti med seboj neodvisni, verjetnosti, da pade grb, pa niso nujno enake. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih.

   (a) Predpostavimo, da so vsi trije kovanci pošteni, verjetnost za grb je za vse kovance enaka $1/2$. Ali sta dogodka A in B neodvisna? Svojo trditev dokaži!(**15**)

   (b) Predpostavimo, da je prvi kovanec pošten, pri drugih dveh pa je verjetnost za grb enaka p, $p \neq 0$, $p \neq 1$. Pri katerih p sta dogodka A in B neodvisna? (**10**)

---

2. Dva igralca neodvisno mečeta vsak svojo kocko, dokler se njuna izida ne seštejeta v 6. Število metov, vključno z zadnjim, naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Poišči porazdelitev slučajne spremenljivke X in jo poimenuj. (**15**)

   (b) Izračunaj verjetnost, da bosta igralca dobila vsoto 6 po sodem številu metov. (**10**)

3. Iz kvadrata $[0,1] \times [0,1]$ naključno izberemo točko T. Slučajna spremenljivka X meri oddaljenost izbrane točke do najbližje koordinate osi.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**15**)

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. (**10**)

4. Igralni kovanec mečemo tako dolgo, da drugič pade grb. Število metov, ki so za to potrebni, je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X, če smo metali pošten igralni kovanec? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! (**15**)

   (b) V 640 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 180-krat sta bila potrebna dva meta, 170-krat trije meti, 100-krat štirje meti, 90-krat pet metov, 40-krat šest metov in 60-krat sedem ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec. (**15**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 29. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Vržemo tri kovance. Predpostavimo, da so meti med seboj neodvisni, verjetnosti, da pade grb, pa niso nujno enake. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih.

   (a) Predpostavimo, da so vsi trije kovanci pošteni, verjetnost za grb je za vse kovance enaka $1/2$. Ali sta dogodka A in B neodvisna? Svojo trditev dokaži!(**15**)

   (b) Predpostavimo, da je prvi kovanec pošten, pri drugih dveh pa je verjetnost za grb enaka p, $p \neq 0$, $p \neq 1$. Pri katerih p sta dogodka A in B neodvisna? (**10**)

---

2. Dva igralca neodvisno mečeta vsak svojo kocko hkrati, dokler se njuna izida ne seštejeta v 6. Število metov, vključno z zadnjim, naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Poišči porazdelitev slučajne spremenljivke X in jo poimenuj. (**15**)

   (b) Izračunaj verjetnost, da bosta igralca dobila vsoto 6 po sodem številu metov. (**10**)

3. Iz kvadrata $[0,1] \times [0,1]$ naključno izberemo točko T. Označimo z X in Y koordinati izbrane točke T in definiramo $Z = |X - Y|$.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka Z? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! **(10)**

   (b) Izračunaj verjetnost $P\left[Z \geq 1/2\right]$. **(8)**

   (c) Izračunaj $E\left(Z\right)$ in $D\left(Z\right)$. **(7)**

4. Podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev

pod 0	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	nad 40
50	120	300	330	140	60

.

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, na kateri je lastnost X porazdeljena z gostoto

$$p(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{|x-20|}{10}}.$$

(25)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 8. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V prvi posodi so 4 bele in 6 črnih kroglic, v drugi posodi je 7 belih in 3 črne kroglice ter v tretji posodi imamo 3 bele in 5 črnih kroglic. Iz prve in druge posode naključno izberemo po eno kroglico in ti dve kroglici prenesemo v tretjo posodo. Na koncu iz tretje posode na slepo izberemo kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je zadnja izbrana kroglica črna? (**10**)

   (b) Na koncu smo izbrali črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da ta kroglica izvira iz prve posode? (**15**)

---

2. Jaka in Tone imata vsak v svoji posodi 8 kroglic, ki so označene s števili od 1 do 8. Jaka naenkrat izžreba 4 kroglice, medtem ko Tone izžreba 2 kroglici. Število enakih kroglic, ki sta jih izžrebala oba, je vrednost slučajne spremenljivke X. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X! **(25)**

3. Z intervala $[0, 2]$ naključno izberemo število x. Vrednost slučajne spremenljivke $X = |x - 1|$ je oddaljenost števila x od 1.

   (a) Izračunaj verjetnost $P\left[X < 1/2\right]$. **(8)**

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! Dano porazdelitev tudi poimenuj! **(10)**

   (c) Izračunaj $E\left(X\right)$ in $D\left(X\right)$. **(7)**

4. Računalniški program je narejen za generiranje slučajnih števil z intervala $[0, 10]$, se pravi vrednosti slučajne spremenljivke X, enakomerno porazdeljene na intervalu $[0, 10]$. Pri 1000 zaporednih številih, dobljenih s tem programom, smo za razrede x_k dobili naslednje frekvence n_k

x_k	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10]$
n_k	152	220	216	248	164

Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ sklepamo, da program ni primeren? **(25)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 8. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Jaka in Tone imata vsak v svoji posodi 15 kroglic, ki so označene s števili od 1 do 15. Jaka naenkrat izžreba 7 kroglic, medtem ko Tone izžreba 4 kroglice. Število enakih kroglic, ki sta jih izžrebala oba, je vrednost slučajne spremenljivke X. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$. **(25)**

---

2. V prvi posodi so 4 bele in 6 črnih kroglic, v drugi posodi je 7 belih in 3 črne kroglice ter v tretji posodi imamo 3 bele in 5 črnih kroglic. Iz prve in druge posode naključno izberemo po eno kroglico in ti dve kroglici prenesemo v tretjo posodo. Na koncu iz tretje posode na slepo izberemo kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je zadnja izbrana kroglica črna? (**10**)

   (b) Na koncu smo izbrali črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da ta kroglica izvira iz prve posode? (**15**)

3. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Vrednost njune vsote naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Izračunaj verjetnost $P\left[X < 1/2\right]$. **(8)**

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! **(10)**

   (c) Izračunaj $E\left(X\right)$ in $D\left(X\right)$. **(7)**

4. Računalniški program je narejen za generiranje slučajnih števil z intervala $[0, 10]$, se pravi vrednosti slučajne spremenljivke X, enakomerno porazdeljene na intervalu $[0, 10]$. Pri 1000 zaporednih številih, dobljenih s tem programom, smo za razrede x_k dobili naslednje frekvence n_k

x_k	$[0, 2)$	$[2, 4)$	$[4, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 10]$
n_k	152	220	216	248	164

.

Ali lahko na osnovi tega vzorca pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ sklepamo, da program ni primeren? **(25)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 8. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Jaka in Tone imata vsak v svoji posodi 15 kroglic, ki so označene s števili od 1 do 15. Jaka naenkrat izžreba 7 kroglic, medtem ko Tone izžreba 4 kroglice. Število enakih kroglic, ki sta jih izžrebala oba, je vrednost slučajne spremenljivke X. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$. **(25)**

---

2. V prvi posodi so 4 bele in 6 črnih kroglic, v drugi posodi je 7 belih in 3 črne kroglice ter v tretji posodi imamo 2 beli in 4 črne kroglice. Iz prve in druge posode naključno izberemo po dve kroglici in te štiri kroglice prenesemo v tretjo posodo. Na koncu iz tretje posode na slepo izberemo kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je zadnja izbrana kroglica črna? (**10**)

   (b) Na koncu smo izbrali črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da ta kroglica izvira iz prve posode? (**15**)

3. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Vrednost njune vsote naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Izračunaj verjetnost $P\left[X < 1/2\right]$. **(8)**

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! **(10)**

   (c) Izračunaj $E\left(X\right)$ in $D\left(X\right)$. **(7)**

4. Pri dveh proizvodnih postopkih, A in B, merimo produktivnost delavcev. Izberemo 10 naključnih delavcev in dobimo naslednje podatke (št. izdelkov na uro):

A	12	7	9	12	15	9	8	13	12	7
B	11	10	14	15	12	11	7	14	11	9

Predpostaviti smemo, da sta slučajni spremenljivki produktivnosti pri postopkih A in B normalno porazdeljeni. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj naslednji hipotezi.

(a) Povprečji produktivnosti pri postopkih A in B sta enaki. (**15**)

(b) Povprečna produktivnost pri postopku A je bistveno manjša od povprečja pri B. (**10**)

Pomoč: Vpelji slučajno spremenljivko $X = B - A$. Če sta produktivnosti enaki, je $E(X) = 0$!

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 8. 2005

1. Jaka in Tone imata vsak v svoji posodi 15 kroglic, ki so označene s števili od 1 do 15. Jaka naenkrat izžreba 7 kroglic, medtem ko Tone izžreba 4 kroglice. Število enakih kroglic, ki sta jih izžrebala oba, je vrednost slučajne spremenljivke X. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X in izračunaj $E(X)$.

2. V prvi posodi so 4 bele in 6 črnih kroglic, v drugi posodi je 7 belih in 3 črne kroglice ter v tretji posodi imamo 2 beli in 4 črne kroglice. Iz prve in druge posode naključno izberemo po dve kroglici in te štiri kroglice prenesemo v tretjo posodo. Na koncu iz tretje posode na slepo izberemo kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je zadnja izbrana kroglica črna?

   (b) Na koncu smo izbrali črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da ta kroglica izvira iz prve posode?

3. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Vrednost njune vsote naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto!

   (b) Izračunaj verjetnost $P[X < 1/2]$ ter določi $E(X)$ in $D(X)$.

4. Pri dveh proizvodnih postopkih, A in B, merimo produktivnost delavcev. Izberemo 10 naključnih delavcev in dobimo naslednje podatke (št. izdelkov na uro):

A	12	7	9	12	15	9	8	13	12	7
B	11	10	14	15	12	11	7	14	11	9

   Predpostaviti smemo, da sta slučajni spremenljivki produktivnosti pri postopkih A in B normalno porazdeljeni. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj naslednji hipotezi.

   (a) Povprečji produktivnosti pri postopkih A in B sta enaki.

   (b) Povprečna produktivnost pri A je bistveno manjša od povprečja pri B.

   Pomoč: Vpelji slučajno spremenljivko $X = B - A$. Če sta produktivnosti enaki, je $E(X) = 0$!

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 6. 9. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Imamo tri črne ploščice, ki so oštevilčene s ciframi $1, 3$ in 5, in tri bele ploščice, ki so oštevilčene z $2, 4$ in 6.

   (a) Vseh šest ploščic razporedimo v raven niz.

   (i) Na koliko načinov lahko to storimo, če morajo vse črne ploščice stati skupaj? (**6**)

   (ii) Koliko je različnih nizov, ki se začnejo in končajo z belo ploščico? (**6**)

   (b) Iz danih ploščic sestavimo štirimestno število.

   (i) Koliko tako dobljenih števil je večjih od 4000? (**6**)

   (ii) Koliko štirimestnih števil ima enice in desetice zapisane na belih ploščicah? (**7**)

---

2. Andrej izmed števil $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ naenkrat izbere 3 števila.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da so vsa izbrana števila manjša od 5? (**8**)

   (b) Vrednost slučajne spremenljivke X je največje izbrano število. Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X. Določi njeno porazdelitveno in verjetnostno funkcijo ter izračunaj matematično upanje. (**17**)

3. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = a\frac{x}{|x|+1} + \frac{1}{2}.$$

(a) Določi konstanto a tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija. Graf porazdelitvene funkcije tudi skiciraj! (**10**)

(b) Izračunaj gostoto slučajne spremenljivke X. (**7**)

(c) Kolikšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti, ki so večje od 1? (**8**)

4. V okolici nekega zdravilišča so 11 zaporednih dni merili hrup. Ali lahko na podlagi dobljenih rezultatov sklepamo, da je povprečna vrednost hrupa pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ enaka 46.5 dB, če predpostavimo, da je preučevana količina normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s standardnim odklonom $\sigma = 0.35$ dB in imamo naslednji vzorec meritev (podatki so v dB):

$$46.20,\ 46.52,\ 46.47,\ 46.05,\ 46.89,\ 46.89,\ 46.97,\ 46.10,\ 46.64,\ 46.29,\ 46.03?$$

(**25**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 6. 9. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Imamo štiri črne ploščice, ki so oštevilčene s ciframi $1, 3, 5$ in 7, in tri bele ploščice, ki so oštevilčene z $2, 4$ in 6.

   (a) Vseh sedem ploščic naključno razporedimo v raven niz. Kolikšna je verjetnost,

      (i) da pri tem vse črne ploščice stojijo skupaj? (**6**)

      (ii) da se sestavljeni niz začne in konča z belo ploščico? (**6**)

   (b) Iz danih ploščic naključno sestavimo štirimestno število. Kolikšna je verjetnost,

      (i) da je dobljeno število večje od 4000? (**6**)

      (ii) da so enice in desetice zapisane na belih ploščicah? (**7**)

---

2. Andrej izmed števil $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ naenkrat izbere 3 števila.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da so vsa izbrana števila manjša od 5? (**8**)

   (b) Vrednost slučajne spremenljivke X je največje izbrano število. Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X. Določi njeno porazdelitveno in verjetnostno funkcijo ter izračunaj matematično upanje. (**17**)

3. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X\left(x\right) = a\frac{x}{|x|+1} + \frac{1}{2}.$$

(a) Določi konstanto a tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija. Graf porazdelitvene funkcije tudi skiciraj! (**10**)

(b) Izračunaj gostoto slučajne spremenljivke X. (**7**)

(c) Kolikšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti, ki so večje od 1? (**8**)

4. Povprečno število točk pri izpitu v dolgoletni zgodovini predmeta Verjetnostni račun in statistika je 75. V lanskem letu je 30 študentov pri enem od izpitov doseglo naslednje rezultate:

$$\begin{array}{cccccccccc} 95 & 70 & 90 & 50 & 85 & 85 & 85 & 95 & 50 & 95 \\ 65 & 85 & 95 & 50 & 50 & 70 & 75 & 85 & 70 & 90 \\ 90 & 80 & 80 & 50 & 75 & 75 & 90 & 70 & 100 & 65 \end{array} .$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da rezultati študentov pri tem izpitu niso odstopali od povprečja. **(25)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 6. 9. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Imamo štiri črne ploščice, ki so oštevilčene s ciframi $1, 3, 5$ in 7, in tri bele ploščice, ki so oštevilčene z $2, 4$ in 6.

   (a) Vseh sedem ploščic naključno razporedimo v raven niz. Kolikšna je verjetnost,

   (i) da pri tem vse črne ploščice stojijo skupaj? (**6**)

   (ii) da se sestavljeni niz začne in konča z belo ploščico? (**6**)

   (b) Iz danih ploščic naključno sestavimo štirimestno število. Kolikšna je verjetnost,

   (i) da je dobljeno število večje od 4000? (**6**)

   (ii) da so enice in desetice zapisane na belih ploščicah? (**7**)

---

2. Andrej izmed naravnih števil $1, 2, ..., 10$ naenkrat izbere 4 števila.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da so vsa izbrana števila večja od 3? (**8**)

   (b) Vrednost slučajne spremenljivke X je najmanjše izbrano število. Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X. Določi njeno porazdelitveno in verjetnostno funkcijo ter izračunaj matematično upanje. (**17**)

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen na kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.

   (a) Zapiši gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y). **(10)**

   (b) Določi robni porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y! Ali sta X in Y neodvisni? **(8)**

   (c) Izračunaj verjetnost $P[X + Y \geq 0]$. **(7)**

4. Povprečno število točk pri izpitu v dolgoletni zgodovini predmeta Verjetnostni račun in statistika je 75. V lanskem letu je 30 študentov pri enem od izpitov doseglo naslednje rezultate:

95	70	90	50	85	85	85	95	50	95
65	85	95	50	50	70	75	85	70	90
90	80	80	50	75	75	90	70	100	65

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da rezultati študentov pri tem izpitu niso odstopali od povprečja. **(25)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 6. 9. 2005

1. Andrej izmed naravnih števil $1, 2, ..., 10$ naenkrat izbere 4 števila. Vrednost slučajne spremenljivke X je najmanjše izbrano število. Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X. Določi njeno porazdelitveno in verjetnostno funkcijo ter izračunaj matematično upanje.

2. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen na območju $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke (x, y) od izhodišča.

   (a) Zapiši gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y).

   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke $Y|X$ in Izračunaj regresijo $E(Y|X)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, ..., X_n$ so neodvisne in vse porazdeljene po Cauchyjevem zakonu z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}.$$
Izračunaj karakteristično funkcijo in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

4. Na vzorcu velikosti $n = 160$ podjetnikov v majhnih podjetjih v Sloveniji, so ugotovili, da je vzorčna povprečna starost anketiranih podjetnikov $\bar{X} = 39.5$ let in vrednost cenilke za vzorčni standardni odklon znaša $S = 9.8$ let.

   (a) Pri stopnji zaupanja $\alpha = 0.95$ določi interval zaupanja za povprečno starost podjetnikov v majhnih podjetjih v Sloveniji.

   (b) V Sloveniji je v majhnih podjetjih 25% podjetnic. Vsaj kolikšna naj bo velikost vzorca, da bo ob 5% tveganju vzorčni delež podjetnic ležal v območju 25%±2%?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 26. 9. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V prvi posodi se nahajajo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi posodi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.

   (a) Iz vsake posode naključno potegnemo dve kroglici. Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo kroglici iste barve, večja? (**10**)

   (b) Iz druge posode na slepo prestavimo eno kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode naključno izvlečemo kroglico in opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve? (**15**)

---

2. Pošteno igralno kocko mečemo, dokler ne pade 4 ali 5, vendar največ šestkrat. Naj bo X število metov.

   (a) Določi zalogo vrednosti slučajne spremenljivke X in določi njeno porazdelitev. Zapiši porazdelitveno, verjetnostno in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X! **(15)**

   (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$. **(10)**

3. Palico dolžine 2 m naključno prelomimo na dva dela. Ploščina pravokotnika, ki ga določata prelomljena dela palice je vrednost slučajne spremenljivke X.

   (a) Izračunaj $P\left[X < 0.5\right]$. **(10)**

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_X\left(x\right)$ in gostoto porazdelitve $p\left(x\right)$ slučajne spremenljivke X. **(15)**

4. Z intervala $[0, 4]$ izbiramo število x. Označimo naslednje dogodke

$$A_1 := x \in [0, 1] \ ; \quad A_2 := x \in (1, 2] \ ; \quad A_3 := x \in (2, 3] \ ; \quad A_4 := x \in (3, 4] \ .$$

Po 160-tih izbiranjih smo dobili naslednje rezultate

A_1	A_2	A_3	A_4
90	40	20	10

.

Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ zavrnemo hipotezo, da je izbiranje števila porazdeljeno z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x) & ; \ x \in [0, 4] \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

(25)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 26. 9. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V prvi škatli je 8 listkov označenih s številkami od 1 do 8, v drugi škatli pa 4 listki, ki so označeni s števili od 1 do 4. Iz vsake škatle potegnemo po en listič in iz dobljenih števk sestavimo dvomestno število, tako da je število iz prve škatle z dvakrat večjo verjetnostjo prva števka kot število iz druge škatle.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da bo tako sestavljeno število večje od 30? (**15**)

   (b) Sestavljeno število je bilo večje od 30. Kolikšna je verjetnost, da je prva števka število iz druge posode? (**10**)

---

2. V razredu je 16 učencev. Prvo uro so vprašani štirje od njih, drugo uro pri drugem predmetu pa še šest učencev neodvisno od dogajanja prvo uro. Naj bo X število učencev, ki niso bili vprašani niti prvo niti drugo uro.

   (a) Določi in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke X! **(15)**

   (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$. **(10)**

3. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = a\,|x|^3\,e^{-x^2}\,.$$

(a) Izračunaj konstanto a in k-ti začetni moment spremenljivke X. Koliko je $E(X)$ in $D(X)$? **(15)**

(b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve! **(10)**

4. Loterija jamči, da je delež srečk z dobitkom enak 20%. Torej verjetnost, da naključno izbrana srečka prinaša dobitek, je 0.2.

   (a) Kolikšna je ocena verjetnosti, da je izmed 100 naključno izbranih srečk vsaj 15 srečk prinaša dobitek? **(10)**

   (b) V vzorcu 100 srečk je dobitek prineslo 11 srečk. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$ testiraj hipotezo, da je verjetnost, da srečka prinaša dobitek, enaka 0.2, proti alternativni hipotezi, da verjetnost ni 0.2. **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.