Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 2. 2. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Janez vrže tri poštene kovance, Tone pa dva poštena kovanca. Naj bo X število grbov, ki jih je dobil Janez in Y število grbov, ki jih je dobil Tone.

   (a) Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajnih spremenljivk X, Y in $Z = X+Y$.(**10**)

   (b) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Janez dobil dva grba, če je dobil več grbov kot Tone? (**15**)

---

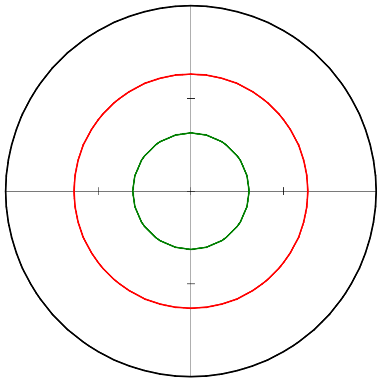
2. Točke $A\,(0,0)$, $B\,(2,0)$, $C\,(2,2)$ in $D\,(0,2)$ so oglišča kvadrata $ABCD$. V kvadratu $ABCD$ naključno izberemo točko $T\,(x,y)$. Ploščina trikotnika ΔABT je vrednost slučajne spremenljivke X.

   (a) Izračunaj verjetnost, da spremenljivka X zavzame vrednost večjo od $3/4$.(**10**)

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**10**)

   (c) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. (**5**)

3. Lokostrelec strelja na okroglo tarčo, ki je razdeljena na tri področja: notranje, srednje in zunanje. Verjetnost, da pri posameznem strelu lokostrelec zadene notranje področje je $1/5$, da zadene srednje področje $1/4$ in zunanje $1/3$.



(a) Kolikšna je verjetnost, da puščica zgreši tarčo? (**5**)

(b) Kolikšna je verjetnost, da pri štirih strelih dve puščici ležita v notranjem, ena v srednjem in ena v zunanjem delu tarče. (**10**)

(c) Oceni, kolikšna je verjetnost, da bo lokostrelec pri 600 strelih zadel tarčo vsaj 460 krat. Uporabi Laplaceovo integralsko formulo! (**10**)

4. Predpostavimo, da je starost samostojnih podjetnikov v Sloveniji porazdeljena normalno $N(a, \sigma)$. Pri 25 naključno ankentiranih podjetnikih smo dobili naslednje podatke o njihovi starosti v letih:

$$39, 32, 36, 39, 30, 53, 29, 50, 55, 39, 34, 48, 50, 34, 45, 29, 41, 48, 38, 62, 50, 53, 31, 21, 43.$$

   (a) Vzorčne podatke uredi v ranžirno vrsto po naraščajoči vrednosti. Izračunaj vse tri vzorčne kvartile q_1, q_2 in q_3 ter določi interval, v katerem leži osrednjih 50% vzorčnih vrednosti. (**8**)

   (b) Izračunaj vzorčno povprečje in vzorčni standardni odklon. (**8**)

   (c) Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je povprečna starost podjetnikov v Sloveniji 45 let? (**9**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 2. 2. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Janez vrže tri poštene kovance, Tone pa dva poštena kovanca. Naj bo X število grbov, ki jih je dobil Janez in Y število grbov, ki jih je dobil Tone.
   (a) Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajnih spremenljivk X, Y in $Z = X+Y$.(**10**)
   (b) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Janez dobil dva grba, če je dobil več grbov kot Tone? (**15**)

---

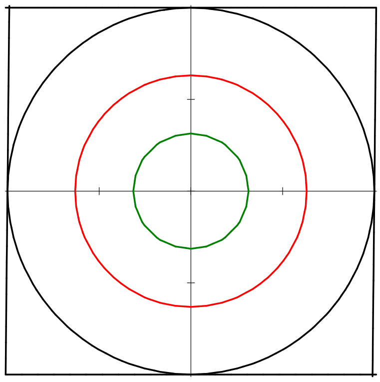
2. V kvadratu $ABCD$ z osnovno stranico dolžine a naključno izberemo točko T. Ploščina četverokotnika $ABTD$ je vrednost slučajne spremenljivke X.

   (a) Izračunaj verjetnost, da spremenljivka X zavzame vrednost, ki je večja od $3/4a^2$? **(10)**

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! **(10)**

   (c) Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X. **(5)**

3. Lokostrelska tarča ima v koordinatnem sistemu obliko kvadrata $[-3,3]\times[-3,3]$. Tri krožnice s polmeri 1, 2 in 3 enote razdelijo tarčo na štiri področja:



Tarča

Lokostrelec zadeva tarčo z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{216}\left(x^2+y^2\right) & ; -3 \leq x, y \leq 3 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Izračunaj verjetnosti, da puščica zadene posamezno področje tarče. (**10**)

(b) Kolikšna je verjetnost, da pri štirih strelih dve puščici ležita v notranjem krogu, ena v srednjem in ena v zunanjem kolobarju tarče. (**8**)

(c) Oceni, kolikšna je verjetnost, da bo izmed 1000 strelov v največjem krogu ($r = 3$ enote) med 575 in 605 zadetkov. Uporabi Laplaceovo integralsko formulo!(**10**)

4. Predpostavimo, da je starost samostojnih podjetnikov v Sloveniji porazdeljena normalno $N(a, \sigma)$. Pri 25 naključno ankentiranih podjetnikih smo dobili naslednje podatke o njihovi starosti v letih:

$$39, 32, 36, 39, 30, 53, 29, 50, 55, 39, 34, 48, 50, 34, 45, 29, 41, 48, 38, 62, 50, 53, 31, 21, 43.$$

   (a) Vzorčne podatke uredi v ranžirno vrsto po naraščajoči vrednosti. Izračunaj vse tri vzorčne kvartile q_1, q_2 in q_3 ter določi interval, v katerem leži osrednjih 50% vzorčnih vrednosti. (**8**)

   (b) Izračunaj vzorčno povprečje in vzorčni standardni odklon. (**8**)

   (c) Ali lahko na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je povprečna starost podjetnikov v Sloveniji 45 let? (**9**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 2. 2. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Pet izmed petnajtih srečk pri srečelovu prinaša dobitek. Andrej naključno izbere tri srečke, za njim pa Blaž še dve srečki. Število Andrejevih srečk, ki prinašajo dobitek je vrednost slučajne spremenljivke X, število Blaževih srečk z dobitkom pa naj bo vrednost spremenljivke Y.

   (a) Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke X. **(10)**

   (b) Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke Y! **(15)**

---

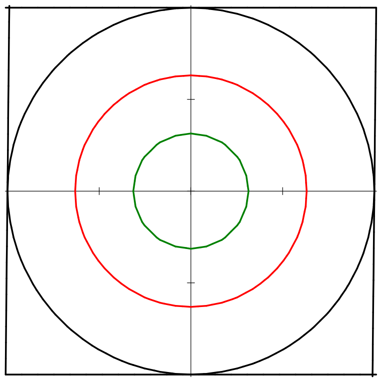
2. V kvadratu $ABCD$ z osnovno stranico dolžine a naključno izberemo točko T. Ploščina četverokotnika $ABTD$ je vrednost slučajne spremenljivke X.

   (a) Izračunaj verjetnost, da spremenljivka X zavzame vrednost, ki je večja od $3/4a^2$? (**10**)

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**10**)

   (c) Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X. (**5**)

3. Lokostrelska tarča ima v koordinatnem sistemu obliko kvadrata $[-3,3]\times[-3,3]$. Tri krožnice s polmeri 1, 2 in 3 enote razdelijo tarčo na štiri področja:



Tarča

Lokostrelec zadeva tarčo z gostoto

$$p(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{216}\left(x^2+y^2\right) & ; -3\leq x,y\leq 3 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Izračunaj verjetnosti, da puščica zadene posamezno področje tarče. (**10**)

(b) Kolikšna je verjetnost, da pri štirih strelih dve puščici ležita v notranjem krogu, ena v srednjem in ena v zunanjem kolobarju tarče. (**8**)

(c) Oceni, kolikšna je verjetnost, da bo izmed 1000 strelov v največjem krogu ($r=3$ enote) med 575 in 605 zadetkov. Uporabi Laplaceovo integralsko formulo!(**10**)

4. Predpostavimo, da je starost samostojnih podjetnikov X v Sloveniji porazdeljena normalno $N(a, \sigma)$ in da je tudi starost samostojnih podjetnic Y porazdeljena normalno $N(b, \tau)$. Pri 40 naključno ankentiranih podjetnikih smo dobili naslednje podatke o njihovi starosti v letih:

   X : 40, 33, 37, 40, 31, 52, 30, 49, 54, 40, 35, 47, 49, 35, 44, 30, 41, 47, 39, 61, 49, 54, 32, 22, 42;
   Y : 39, 30, 40, 32, 42, 30, 29, 37, 32, 34, 44, 21, 34, 51, 36.

   (a) Na podlagi danih podatkov izračunaj vzorčni povprečji $\bar{X}$, $\bar{Y}$ in vzorčna standardna odklona S_X, S_Y. **(8)**

   (b) Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$ opravi preizkus značilnosti za ničelno hipotezo, da sta standardna odklona obeh porazdelitev enaka. **(8)**

   (c) Ali lahko na osnovi danega vzorca s 5% tveganjem zavrnemo ničelno hipotezo, da sta povprečni starosti samostojnih podjetnikov in podjetnic v Sloveniji enaki? **(9)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 17. 2. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V žepu imamo 5 bankovcev po 100 tolarjev, 3 bankovce po 300 tolarjev in 2 bankovca po 500 tolarjev. Sežemo v žep in naključno izvlečemo tri bankovce. Izračunaj, kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A - vsaj dva od izvlečenih bankovcev imata enako vrednost; (**10**)

   B - z izvlečenimi bankovci lahko plačamo malico, ki stane 700 tolarjev; (**10**)

   C - malico lahko plačamo tako, da se račun ravno izide. (**5**)

---

2. Na daljici AB dolžine l naključno in neodvisno izberemo dve točki. Vrednost slučajne spremenljivke X je razdalja med izbranima točkana.

   (a) Izračunaj verjetnost, da spremenljivka X zavzame vrednost, ki je večja od $l/2$. (**10**)

   (b) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (**10**)

   (c) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. (**5**)

3. Šest radarjev A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in A_6 je po vrsti postavljenih v ogliščih pravilnega šestkotnika z osnovno stranico $a = 200\ m$. Okvara posameznega radarja je enako verjetna. Določi povprečno pot, ki jo ob okvari vzdrževalec prehodi, če ima svojo postajo v A_1 in iz katere vsakokrat odide po najkrajši poti po obodu šestkotnika do pokvarjenega radarja in se po popravilu spet vrne v točko A_1. Ugotovi najprej, kako je porazdeljena diskretna slučajna spremenljivka X, ki meri dolžino posameznega sprehoda! **(25)**

4. Po križanju dveh vrst orhidej lahko dobimo rumeno, belo, rdečo in modro orhidejo. Vrtnarji so postavili hipotezo, da sta rdeča in modra orhideja enako verjetni, medtem ko se bela in rumena orhideja pojavljata dvakrat pogosteje. V 60-tih poskusih križanja smo dobili naslednje rezultate:

rumena	bela	rdeča	modra
16	25	12	7

.

Ali so ti rezultati na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ v nasprotju s postavljeno hipotezo?(**25**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 17. 2. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. V žepu imamo 5 bankovcev po 100 tolarjev, 3 bankovce po 300 tolarjev in 2 bankovca po 500 tolarjev. Sežemo v žep in naključno izvlečemo tri bankovce. Označimo naslednje dogodke:

   A - vsaj dva od izvlečenih bankovcev imata enako vrednost;

   B - z izvlečenimi bankovci lahko plačamo malico, ki stane 700 tolarjev;

   C - malico lahko plačamo tako, da se račun ravno izide.

   Izračuna verjetnosti $P(A), P(B), P(C), P(C|B)$ in $P(B|A)$. **(25)**

---

2. Naj bo $n = 2k$ radarjev $A_1, A_2, \ldots, A_n$ po vrsti postavljenih v ogliščih pravilnega n-kotnika z osnovno stranico a. Okvara posameznega radarja je enako verjetna. Določi povprečno pot, ki jo ob okvari vzdrževalec prehodi, če ima svojo postajo v A_1 in iz katere vsakokrat odide po najkrajši poti po obodu n-kotnika do pokvarjenega radarja in se po popravilu spet vrne v točko A_1. Ugotovi najprej, kako je porazdeljena diskretna slučajna spremenljivka X, ki meri dolžino posameznega sprehoda! (**25**)

3. Slučajna spremenljivka X je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1]$, od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y pa enakomerno na intervalu $[0, 2]$.

   (a) Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši njegovo gostoto?(**10**)

   (b) Določi gostoto verjetnosti in disperzijo slučajne spremenljivke $Z = |X - Y|$.(**15**)

4. Na avtomatu za polnjenje sladkorja v vrečke piše, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 1 kg enak 0.015 kg. Na vzorcu 16-tih vrečk so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 1.03$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 0.02$. Na osnovi teh podatkov in stopnji tveganja $\alpha = 0.01$ testiraj hipotezi:

   $H_0\,(a = 1)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 1)$ in

   $H_0\,(\sigma = 0.015)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\sigma \neq 0.015)$.

   Svoji odločitvi utemelji! (**25**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 13. 4. 2006

1. Iz množice naravnih števil naključno izberemo število n. Izračunaj verjetnost dogodka, da izbrano število n ni deljivo z nobenim od števil 2, 3, 5 in 6.

2. Verjetnosti zadetka pri posameznem strelu za tri lokostrelce so po vrsti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Pri hkratnem strelu vseh strelcev opazimo dva zadetka. Kolikšna je verjetnost, da je zgrešil drugi strelec?

3. Šahista Tine in Tone imata dvoboj. Tine dobi igro z verjetnostjo $\frac{2}{5}$, Tone pa z verjetnostjo $\frac{3}{5}$. Igrata dokler eden od njiju ne dobi treh iger. Naj bo X število iger, ki jih je v dvoboju dobil Tine. Zapiši porazdelitev spremenljivke X!

4. V $\mathbb{R}^2$ je dano območje $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Točko T naključno izberemo na robu območja D (t.j. na daljici in polkrožnici). Vrednost slučajne spremenljivke X je oddaljenost točke T od izhodišča $(0, 0)$.

   (a) Določi porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke X. Izračunaj porazdelitveno funkcijo in skiciraj njen graf!

   (b) Izračunaj verjetnosti: $P(X = 2)$, $P(X = 1)$ in $P(X > 1)$.

5. Center republike Slovenije za obveščanje je skozi celo leto beležil število požarov, ki so izbruhnili v državi. Dobljeni rezultati so v tabeli:

Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
50	40	30	40	75	90	65

   Ali lahko pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je pojavljanje požarov porazdeljeno enakomerno?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 13. 4. 2006

1. Iz množice naravnih števil naključno izberemo število n. Izračunaj verjetnost dogodka, da izbrano število n ni deljivo z nobenim od števil 2, 3, 5 in 7.

2. Na daljici AB leži točka C, ki deli daljico v razmerju $AC : CB = 2 : 1$. Na odseku AC naključno izberemo točko D in na odseku CB naključno izberemo točko E. Izračunaj, kolikšna je verjetnost dogodka, da lahko z daljicami AD, DE in EB sestavimo trikotnik.

3. Šahista Tine in Tone imata dvoboj. Tine dobi igro z verjetnostjo $\frac{2}{5}$, Tone pa z verjetnostjo $\frac{3}{5}$. Igrata dokler eden od njiju ne dobi štirih iger. Naj bo X število iger, ki jih je v dvoboju dobil Tine. Zapiši porazdelitev spremenljivke X!

4. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(x^2-y^2)^2} & ; \ |y| < x - 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določi porazdelitev slučajnega vektorja (U, V), kjer je $U = X + Y$ in $V = X - Y$. Ali sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni?

5. Predpostavimo, da je teža novorojenčkov X pri materah, ki so v nosečnosti kadile na populaciji porazdeljena normalno $N(a, \sigma)$ in da je tudi teža novorojenčkov Y pri materah, ki v nosečnosti niso kadile porazdeljena normalno $N(b, \tau)$. Na osnovi vzorca teže novorojenčkov v gramih

$$X : 2643, 2906, 3444, 2211, 2940, 2594, 2495, 2992, 2466, 3303;$$
$$Y : 3860, 2733, 3203, 3487, 3100, 3827, 3062, 1729, 2877, 2977, 4054, 3699;$$

   določi 95% interval zaupanja za razliko povprečne porodne teže novorojenčkov pri materah, ki so oz. niso kadile.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 14. 6. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Janez vrže tri poštene kovance, Tone pa dva poštena kovanca. Naj bo X število grbov, ki jih je dobil Janez in Y število grbov, ki jih je dobil Tone.

   (a) Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajnih spremenljivk X, Y in $Z = X+Y$.(**10**)

   (b) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Janez dobil dva grba, če je dobil več grbov kot Tone? (**15**)

---

2. Na daljici AB leži točka C, ki deli daljico v razmerju $AC : CB = 2 : 1$. Na odseku AC naključno izberemo točko D in na odseku CB naključno izberemo točko E. Izračunaj, kolikšna je verjetnost dogodka, da lahko z daljicami AD, DE in EB sestavimo trikotnik. **(25)**

3. Televizijski oddajnik želi vzpostaviti zvezo s satelitom, zato odda signal vsako minuto. Verjetnost, da satelit sprejme signal je 0.3. Diskretna slučajna spremenljivka X meri čas, ki je potreben, da pride do vzpostavitve zveze.

   (a) Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! (**10**)

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X. (**10**)

   (c) V kolikšnem času v povprečju je zveza vzpostavljena? (**5**)

4. Predpostavimo, da je slučajna spremenljivka X na populaciji porazdeljena normalno $N(25, 10)$.

   (a) Izračunaj verjetnosti $P(X < 10)$, $P(10 \leq X < 20)$, $P(20 \leq X < 30)$, $P(30 \leq X < 40)$ in $P(X \geq 40)$. **(10)**

   (b) Vzorčni podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	$10 - 20$	$20 - 30$	$30 - 40$	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25, 10)$. **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 15. 6. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Pošteno igralno kocko vržemo trikrat. Določi verjetnost, da bo pri enem izmed metov padlo toliko pik kot pri drugih dveh skupaj! (**25**)

---

2. Nekdo pride vsak dan na avtobusno postajo naključno med sedmo in deveto uro. Vedno vstopi na avtobus A ali na avtobus B; na tistega, ki prej pride. Vozni red avtobusa A je $7^{10}, 7^{40}, 8^{10}$ in 8^{40} in vozni red avtobusa B je $7^{25}, 7^{50}, 8^{30}$ in 9^{00}. Kakšna je verjetnost, da se pelje v službo z avtobusom A oz B? **(25)**

3. Na intervalu dolžine 2 naključno in neodvisno izberemo točki A in B, in sicer z gostoto verjetnosti, ki je premo sorazmerna s kvadratom oddaljenosti izbrane točke od središča intervala. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo med točkama A in B. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj $E(X)$! **(25)**

4. Za nenegativno slučajno spremenljivko smo razdelili realno os v razrede

$$S_1 = (-\infty, 1)\ , \ S_2 = [1, 2)\ , \ S_3 = [2, 3)\ , \ S_4 = [3, 4)\ , \ S_5 = [4, 5)\ , \ S_6 = [5, \infty)\ .$$

V vzorcu velikosti $n = 1000$ smo našli za te razrede frekvence

$$n_1 = 610,\ n_2 = 220,\ n_3 = 100,\ n_4 = 40,\ n_5 = 20,\ n_6 = 10\,.$$

Na osnovi teh podatkov preskusi hipotezo, da je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \quad .$$

(25)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 14. 6. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Imamo N posod in v vsaki n belih in m rdečih kroglic. Iz prve posode naključno izberemo kroglico in jo prenesemo v drugo, nato se iz druge posode naljučno prenese kroglica v tretjo in tako naprej do zadnje posode. Kakšna je verjetnost, da na koncu iz zadnje posode izvlečemo belo kroglico? (Pomoč: reši nalogo za $N = 1, 2, 3$ in nato svojo trditev dokaži.) **(25)**

---

2. V razredu je 20 učencev. Prvo uro so vprašani štirje od njih, drugo uro pri drugem predmetu pa še pet učencev neodvisno od dogajanja prvo uro. Naj bo X število učencev, ki niso bili vprašani niti prvo niti drugo uro.

   (a) Določi in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke X! **(15)**

   (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$. **(10)**

3. Slučajna spremenljivka X je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 2]$, od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y pa ima porazdelitveno funkcijo

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y \leq 0 \\ \frac{1}{4}y^2 & ; 0 < y \leq 2 \\ 1 & ; \quad y > 2 \end{cases} .$$

   (a) Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši njegovo gostoto?(**10**)

   (b) Določi gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = Y - X$. (**15**)

4. Predpostavimo, da je slučajna spremenljivka X na populaciji porazdeljena normalno $N(25, 10)$.

   (a) Izračunaj verjetnosti $P(X < 10)$, $P(10 \leq X < 20)$, $P(20 \leq X < 30)$, $P(30 \leq X < 40)$ in $P(X \geq 40)$. **(10)**

   (b) Vzorčni podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	$10 - 20$	$20 - 30$	$30 - 40$	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25, 10)$. **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 14. 6. 2006

1. V razredu je 20 učencev. Prvo uro so vprašani štirje od njih, drugo uro pri drugem predmetu pa še pet učencev neodvisno od dogajanja prvo uro. Naj bo X število učencev, ki niso bili vprašani niti prvo niti drugo uro.
   (a) Določi in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke X!
   (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$.

2. Slučajna spremenljivka X je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0,2]$, od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y pa ima porazdelitveno funkcijo
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y \leq 0 \\ \frac{1}{4}y^2 & ; 0 < y \leq 2 \\ 1 & ; \quad y > 2 \end{cases}.$$
   Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor (X,Y)? Določi tudi gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = Y - X$.

3. Delec se giblje po mreži trikotnika ΔABC. Iz oglišča A se delec vedno premakne v oglišče B. Če je delec v oglišču B, potem z verjetnostjo p ostane v oglišču B ali pa se premakne v oglišče C. Če je delec v oglišču C, potem je enako verjetno, da v C tudi ostane ali pa se premakne v A. Gibanje delca opiši s homogeno markovsko verigo in za vsako oglišče trikotnika izračunaj povprečen čas vrnitve delca.

4. Predpostavimo, da je slučajna spremenljivka X na populaciji porazdeljena normalno $N(25,10)$.
   (a) Izračunaj verjetnosti $P(X < 10)$, $P(10 \leq X < 20)$, $P(20 \leq X < 30)$, $P(30 \leq X < 40)$ in $P(X \geq 40)$.
   (b) Vzorčni podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	$10-20$	$20-30$	$30-40$	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25,10)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 28. 6. 2006

1. V žepu imamo 6 bonov po 100 tolarjev, 4 bone po 300 tolarjev in 2 bona po 500 tolarjev. Sežemo v žep in naključno izvlečemo tri bone. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A - vsaj dva od izvlečenih bonov imata enako vrednost;

   B - z izvlečenimi boni lahko plačamo malico, ki stane 700 tolarjev;

   C - malico lahko plačamo tako, da se račun ravno izide.

2. Štiri podjetja dobavljajo trgovini izdelek v razmerju $2 : 3 : 3 : 4$. Verjetnost, da je dobavljen izdelek z napako je pri prvem podjetju 0.2, pri drugem 0.3, pri tretjem 0.2 in pri četrtem 0.1. V trgovini kupimo izdelek, ne da bi vedeli za njegovo poreklo. Kolikšna je verjetnost, da je kupljen izdelek neuporaben? Kolikšna je verjetnost, da je kupljen izdelek od tretjega proizvajalca, če je bil brez napake?

3. Sočasno vržemo dve pošteni igralni kocki. Slučajna spremenljivka X naj bo vsota, slučajna spremenljivka Y pa večje število pik na obeh kockah.

   (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y? Zapiši njuni verjetnostni funkciji in izračunaj $E(X)$ ter $E(Y)$.

   (b) Kakšna je verjetnost, da vrednosti slučajne spremenljivke $X \cdot Y$ ležijo na intervalu $[10, 14]$?

4. Naj bo slučajna spremenljivka X zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 & ; x \in [0,1] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Skiciraj graf gostote $p(x)$ ter določi konstanto a.

   (b) Izračunaj verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame manjšo vrednost od njenega matematičnega upanja in prikaži rezultat na grafu porazdelitvene funkcije F_X.

5. Kovanec vržemo 100 krat. Pri tem je padlo 75 grbov in 25 cifer. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezi, da se število grbov pojavlja dvakrat oziroma trikrat pogosteje.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 28. 6. 2006

1. V žepu imamo 6 bonov po 100 tolarjev, 4 bone po 300 tolarjev in 3 bone po 500 tolarjev. Sežemo v žep in naključno izvlečemo tri bone. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A - vsaj dva od izvlečenih bonov imata enako vrednost;

   B - z izvlečenimi boni lahko plačamo malico, ki stane 700 tolarjev;

   C - malico lahko plačamo tako, da se račun ravno izide.

2. Najprej vržemo pošteno igralno kocko nato kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Število padlih pik naj bo vrednost slučajne spremenljivke X, število padlih grbov pa vrednost slučajne spremenljivke Y.

   (a) Kako je porazdeljen diskretni slučajni vektor (X, Y)? Določi robni porazdelitvi X in Y!

   (b) Kakšna je verjetnost, da padejo vsaj 3 grbi, če so padle vsaj 4 pike?

3. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen z gostoto

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2}\varphi & ; \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & ; \varphi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} .$$

   Naj zvezna slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto.

4. Na avtomatu za polnjenje sladkorja v vrečke piše, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 1 kg enak 0.02 kg. Na vzorcu 16-tih vrečk so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 1.025$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 0.015$. Na osnovi teh podatkov in stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezi:

   $H_0\,(a = 1)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 1)$ in

   $H_0\,(\sigma = 0.02)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\sigma \neq 0.02)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 8. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Na koliko načinov lahko:

   (a) 6 rdečih, 4 modre in 4 zelene kroglice zložimo v vrsto tako, da modre kroglice stojijo skupaj; (**5**)

   (b) 6 bankovcev po 1000 SIT in 3 bankovce po 500 SIT razdelim med dve osebi;(**5**)

   (c) izmed 20-tih kart za šnops izberem 6 kart, tako da dobim dva asa; (**5**)

   (d) izmed štirimestnih števil izberem sodo število s samimi različnimi števkami?(**5**)

---

2. Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo 2/3, drugi pa z verjetnostjo 3/4. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora priletijo tri sovražna letala.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da katerega od njih ne odkrije noben radar? (**10**)

   (b) Denimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega? (**15**)

3. Slučajno in neodvisno ter z enakomerno porazdelitvijo izberemo dve števili z intervala $[0, 1]$. Naj bo X razdalja med njima. Določi porazdelitveno funkcijo F_X, porazdelitveno gostoto p in matematično upanje $E(X)$. **(25)**

4. Igralni kovanec mečemo, dokler ne pade najprej cifra, takoj za njo pa še grb. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število metov.

   (a) Določi porazdelitev.slučajne spremenljivke X, če smo metali pošten kovanec.(**15**)

   (b) V 320 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 80-krat sta bila potrebna dva meta, 70-krat trije meti, 70-krat štirje meti, 60-krat pet metov, 40-krat šest ali več metov. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi hipotezo, da smo metali pošten kovanec. (**15**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 8. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo a, drugi pa z verjetnostjo b. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora prileti n sovražnih letal.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da katerega od njih ne odkrije noben radar? (**10**)

   (b) Denimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega? (**15**)

---

2. Na stranicah kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$, ki ne ležita na koordinatnih oseh, izberemo na slepo in neodvisno dve točki, X in Y, na vsaki stranici po eno.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika z oglišči O, X in Y manjša od $1/4$? **(15)**

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke, ki meri ploščino dobljenega trikotnika! **(15)**

3. Dana je funkcija

$$F_X(x) = a + b \arctan \frac{x}{2}.$$

(a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X porazdelitvena funkcija neke zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke X, in poišči njeno gostoto $p\,(x)$. (**15**)

(b) Dokaži, da slučajna spremenljivka X nima matematičnega upanja, ter izračunaj njeno mediano in semiinterkvartilni razmik. (**10**)

4. Prodajalec žarnic zagotavlja, da je njihova povprečna življenjska doba enaka 820 ur. Pred nakupom testiramo 36 primerkov žarnic in izmerimo njihovo trajanje v urah:

$$782, 734, 760, 779, 717, 881, 711, 860, 895, 780, 749, 841, 859, 749, 823, 712, 795, 844,$$
$$774, 939, 859, 879, 726, 620, 807, 828, 741, 843, 775, 857, 756, 747, 815, 773, 792, 872.$$

Ali lahko na osnovi tveganja 5% zavrnemo prodajalčevo trditev? (**20**)

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 5. 9. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Stroj ima tri bistvene sestavne dele in deluje, če delujeta vsaj dva dela. Vsak del se lahko pokvari neodvisno od drugih delov. Verjetnost, da se v določenem času pokvari prvi del, je 2%, verjetnost, da se pokvari drugi del, je 10%, verjetnost, da se pokvari tretji del, pa je 5%. V primeru okvare bi radi popravili vse pokvarjene dele. Popravilo prvega stane 10.000 SIT, popravilo drugega 3.000 SIT in popravilo tretjega dela 5.000 SIT.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da se bo stroj pokvaril in bomo za popravilo plačali več kot 14.000 SIT? **(10)**

   (b) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil pokvarjen tudi drugi del, če smo za popravilo plačali več kot 14.000 SIT? **(15)**

---

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$vsota izbranih števil je večja od 1;

   $B-$vsota kvadratov izbranih števil je večja od 1;

   $C-$vsota kvadratov prvih dveh števil je večja od 1.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A/B)$, $P(B/C)$. **(25)**

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0,2]$, za slučajno spremenljivko Y, ki je neodvisna od X, pa velja $P(Y=0)=\frac{1}{3}$, $P(Y=1)=\frac{1}{2}$, $P(Y=2)=\frac{1}{6}$. Naj bo $Z=XY$. Določi porazdelitvene funkcije F_X, F_Y, F_Z in skiciraj njihove grafe. Katere od teh treh slučajnih spremenljivk so diskretno in katere zvezno porazdeljene? (**25**)

4. Proizvajalec kondenzatorjev deklarira, da je njihova povprečna kapaciteta 100 pF. Ko izmerimo kapaciteto slučajno izbranim desetim kondenzatorjem, dobimo naslednje rezultate v pF:

$$99, 92, 101, 92, 89, 95, 88, 97, 102, 97$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da je povprečna kapaciteta enaka 100 pF, proti alternativni hipotezi, da je različna od 100 pF. Za serijo privzemi, da je porazdeljena normalno. **(25)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 5. 9. 2006

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Stroj ima tri bistvene sestavne dele in deluje, če delujeta vsaj dva dela. Vsak del se lahko pokvari neodvisno od drugih delov. Verjetnost, da se v določenem času pokvari prvi del, je 2%, verjetnost, da se pokvari drugi del, je 10%, verjetnost, da se pokvari tretji del, pa je 5%. V primeru okvare bi radi popravili vse pokvarjene dele. Popravilo prvega stane 10.000 SIT, popravilo drugega 3.000 SIT in popravilo tretjega dela 5.000 SIT.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da se bo stroj pokvaril? (**9**)

   (b) Kolikšna je verjetnost, da bomo v primeru okvare za popravilo plačali več kot 10.000 SIT? (**8**)

   (c) Kolikšna je verjetnost, da je bil v primeru okvare pokvarjen tudi tretji del, če smo za popravilo plačali več kot 10.000 SIT? (**8**)

---

2. V kvadratu $ABCD$ naključno izberemo točko. Kolikšna je verjetnost, da je izbrana točka:

   (a) bližje središču kvadrata kot pa kateremu od oglišč; **(10)**

   (b) bližje eni od diagonal kvadrata kot pa kateri od stranic? **(15)**

3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} a - e^{-2x} & ; \; x \geq 0 \\ b & ; \; x < 0 \end{cases} .$$

(a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija ter skiciraj njen graf. **(10)**

(b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke X in $P[1 < X < 2]$. **(5)**

(c) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$? **(10)**

4. Proizvajalec kondenzatorjev deklarira, da je njihova povprečna kapaciteta 100 pF. Ko izmerimo kapaciteto slučajno izbranim desetim kondenzatorjem, dobimo naslednje rezultate v pF:

$$99, 92, 101, 92, 89, 95, 88, 97, 102, 97$$

   (a) Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da je povprečna kapaciteta enaka 100 pF, proti alternativni hipotezi, da je manjša od 100 pF. Za serijo privzemi, da je porazdeljena normalno. (**15**)

   (b) Se rezultat kaj spremeni, če vzamemo dvostranski test? (**10**)

Točke so razporejene ob nalogah.