Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 23.11.2000

1. V trapezu $ABCD$ je krak AD pravokoten na osnovnico, diagonali sta pravokotni ena na drugo in $|DC| : |AB| = \lambda$, kjer je $0 < \lambda < 1$.

   (a) Naj bosta točki E in F razpolovišči stranic AB in BC. V kakšnem razmerju razdeli daljica EF diagonalo BD?

   (b) Izračunaj razmerje diagonal $|AC| : |BD|$.

2. Naj bosta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja. Obravnavaj rešljivost enačbe:

$$(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a}) \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = 2\,(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a})\ .$$

   Kaj geometrijsko predstavljajo rešitve te enačbe?

3. Naj bo $\mathcal{A}$ množica tistih točk iz $\mathbb{R}^3$, ki so enako oddaljene od točk $A\,(1,1,0)$, $B\,(-1,2,1)$ in $C\,(0,0,2)$.

   (a) Ugotovi, kaj geometrijsko predstavlja množica $\mathcal{A}$ in zapiši njeno enačbo.

   (b) Poišči vse take točke $D \in \mathcal{A}$, da bo $\measuredangle ADC$ pravi kot v piramidi $ABCD$ in izračunaj še volumen te piramide.

4. Glede na realno število λ obravnavaj rešljivost sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right. .$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 19.1.2001

1. Reši matrično enačbo $AXB + A^T = 0$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$
Glede na parameter c določi rang dobljene matrike X.

2. Naj bosta A in B matriki razsežnosti 2×2, ki komutirata z matriko
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Pokaži, da je $AB = BA$.

3. Naj bo $M_n(\mathbb{R})$ vektorski prostor $n \times n$ realnih matrik. Naj bo V vektorski podprostor vseh simetričnih matrik, U pa vektorski podprostor vseh poševno simetričnih matrik.
   (a) Dokaži, da sta U in V res vektorska podprostora.
   (b) Zapiši kakšni bazi podprostorov U in V.
   (c) Dokaži, da je $U \oplus V = M_n(\mathbb{R})$.

4. Reši enačbo:
$$\begin{vmatrix} -x+2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & x+3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & x+(n-2) & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n-2 & x+(n-1) & 1 \\ 4 & 6 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^n & 2x^2+x \\ x^{n-2} & x \end{vmatrix}.$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 5.4.2001

1. Naj bo $\mathcal{B} = \{(1,0,2), (1,1,4), (0,1,3)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Zapiši matriko zasuka prostora $\mathbb{R}^3$ za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivni smeri okoli osi y v bazi $\mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{A} : V \to V$ linearni operator ranga 1, to pomeni $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$.

   (a) Dokaži, da obstaja tak element $c \in \mathbb{F}$, da je $\mathcal{A}^2 = c\mathcal{A}$.

   (b) Kaj so lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$?

3. Določi Jordanovo kanonično obliko J in tako matriko P, da bo $J = P^{-1}AP$ za matriko
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem in $\mathcal{P}$ projektor vektorskega prostora V. Dokaži:

   (a) Podprostor $\operatorname{Im} \mathcal{P}$ je invarianten za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{PAP} = \mathcal{AP}$.

   (b) Podprostora $\operatorname{Im} \mathcal{P}$ in $\operatorname{Ker} \mathcal{P}$ sta oba invariantna za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko velja $\mathcal{PA} = \mathcal{AP}$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 4.5.2001

1. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
poišči tako matriko P, da bo $P^T AP$ diagonalna matrika.

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava A zrcali čez ravnino $\pi : x + y + z = 0$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi A in A^*, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave A^*.

3. Na realnem funkcijskem prostoru $V = \{a + b \sin x + c \cos x | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ definiramo linearni funkcional $F : V \to \mathbb{R}$ s predpisom $F(f) = f(0)$ za vse $f \in V$.

   (a) Določi jedro linearnega funkcionala F. Koliko je njegova dimenzija?

   (b) Na V je definiran skalarni produkt
   $$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
   za vse $f, g \in V$. Poišči tak $h \in V$, da bo $F(f) = \langle f|h\rangle$ za vse $f \in V$.

4. Z ortogonalnimi transformacijami prevedi realno kvadratno formo $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x, y, z) = 13x^2 + y^2 + 4z^2 - 12xz$ v obliko s samimi kvadratnimi členi. Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 1$. To ploskev tudi natančno skiciraj.

Naloge so enakovredne.