Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 13. 11. 2001

1. (25) Točka $A\,(0,1,0)$ leži na ravnini $x+y+z=1$ in točka $B\,(1,0,1)$ leži na ravnini $x+y-z=0$. Poišči točko C, ki leži na preseku obeh ravnin, da bo trikotnik ΔABC pravokoten. Obravnavaj vse možne rešitve!

2. (20) Naj bosta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ nekolinearna vektorja. Poišči vse tiste $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, ki zadoščajo
$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}\,.$$
Pomoč: upoštevaj, da so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ linearno neodvisni.

3. (30) V pravilnem tetraedru $ABCD$ naj bo T težišče trikotnika ΔABC in T' težišče trikotnika ΔBCD.
   (a) Dokaži, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ pravokotna.
   (b) Izračunaj kot med stranskim robom in osnovno ploskvijo tetraedra.
   (c) V kakšnem razmerju deli ena od telesnih težiščnic DT, AT' drugo?

4. (25) Glede na realno število a obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{aligned} (1-a)\,z + \left(a^2-a\right)u &= a-1\,,\\ ax - 2y + (1+a)\,z + u &= a^2 - a\,,\\ y - z - u &= 0\,,\\ -ax + 2y - z - u &= 0\,. \end{aligned}$$

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 18. 12. 2001

1. Reši matrično enačbo $A^{-1}XA^2 = A^{-1}CA - 2A^{-1}XA$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Realno matriko dimenzije $n \times n$ imenujemo ortogonalna matrika, če velja $AA^T = A^TA = I$.

   (a) Pokaži, da je

   $$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

   ortogonalna matrika dimenzije 3×3.

   (b) Dokaži, da je produkt ortogonalnih matrik spet ortogonalna matrika.

   (c) Izračunaj determinanto ortogonalne matrike.

3. Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} x & 2a & 3a & \cdots & na \\ 2a & 4x & 6a & \cdots & 2na \\ 3a & 6a & 9x & \cdots & 3na \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na & 2na & 3na & \cdots & n^2x \end{bmatrix}.$$

4. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ realnih $n \times n$ matrik je dana podmnožica $V = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX - XA^T = 0\right\}$, kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.

   (a) Dokaži, da je V realni vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) V primeru, ko je $n = 3$ in $A = E_{12} + E_{23}$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostora V.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 23. 1. 2002

1. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}(X) = a\left(X + X^T\right)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ neničelna konstanta.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
   (c) Določi konstanto a tako, da bo $\mathcal{A}$ projektor.

2. Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[X]$ je podan s predpisom: $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1+x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x+x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2+x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$ in $\mathcal{A}(x^3+x^4) = -2x^3 + 2x^4$.
   (a) Poišči matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Določi podprostore $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$.

3. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$
   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

4. Dokaži, da so za vektorski prostor V naslednje trditve ekvivalentne:
   (a) $\dim V \geq 2$.
   (b) Obstajata neničelna vektorska podprostora U in W, da velja $V = U \oplus W$.
   (c) Obstaja neničelni projektor $\mathcal{P} : V \to V$, katerega $\operatorname{Ker}\mathcal{P} \neq 0$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 8. 4. 2002

1. Poišči Jordanovo kanonično obliko, bazo, v kateri ima to obliko ter minimalni polinom za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava A zrcali pravokotno čez premico $p : x = y = z$. Poišči matriki v standarni bazi za preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$, določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$. Kaj ugotoviš?

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(2)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.

   (a) Določi jedro funkcionala F. Koliko je dimenzija jedra?

   (b) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

   (c) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

4. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ linearna operatorja na unitarnem prostoru. Dokaži naslednji trditvi:

   (a) Zaloga vrednosti operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ je enaka zalogi vrednosti operatorja $\mathcal{A}^*$.

   (b) Jedro operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{B}^*\mathcal{B}$ je enako preseku jeder operatorjev $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Naloge so enakovredne.