Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3.12.1999

1. Računalniško revijo iščemo v treh knjižnicah, ki naročajo revije neodvisno ena od druge. Enako verjetno je, da to revijo v knjižnici naročijo oziroma je ne naročijo. Če revijo naročijo, je enako verjetno, da je ob našem prihodu izposojena kot, da ni izposojena. Izračunaj verjetnost, da bomo revijo našli.

2. Vržemo pošteno igralno kocko, nato pa pošten kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da dobimo enako število grbov kot cifer.

3. Na daljici $\overline{AB}$ naključno izberemo dve točki. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$ vsota oddaljenosti točk od bližnjega krajišča je manjša od medsebojne razdalje;

   $B-$ izbrani točki ležita na različnih polovicah glede na razpolovišče daljice $\overline{AB}$.

   Kakšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$ in $P(A|B)$?

4. Kolika je verjetnost, da s tremi kockami v n metih vržemo vsoto 16 pik natanko dvakrat, vsaj enkrat, vedno? Izračunajte verjetnosti za $n = 10$, 15, 20 na tri decimalke natančno.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3.12.1999

1. Izmed naravnih števil naključno izberemo število. Kakšna je verjetnost, da je to število brez kvadratnih deliteljev?

2. Naključno izberemo tri daljice, ki imajo dolžino manjšo od l. Kakšna je verjetnost, da z njimi sestavimo trikotnik?

3. V mreži $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ izberimo točki $T\,(n, m)$ in $A\,(p, q)$ z lastnostjo $0 < p < n$ in $0 < q < m$.

   (a) Koliko je najkrajših poti iz izhodišča (0.0) do točke T?

   (b) Kakšna je verjetnost, da naključno izbrana pot iz izhodišča do točke T ne gre skozi točko A?

4. Vržemo pošteno igralno kocko, nato pa pošten kovanec tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da dobimo enako število grbov kot cifer.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.1.2000

1. V posodi imamo 3 bele in 1 rdečo kroglico. Naključno izberemo kroglico iz posode in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka T meri število izbir, ki so potrebne, da prvič izvlečemo rdečo kroglico.
   (a) Zapiši verjetnostno funkcijo diskretne slučajne spremenljivke T.
   (b) Izračunaj rodovno funkcijo $G_T(t)$, matematično upanje in disperzijo.

2. Zvezna slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} (1-|x|) & ; x \in [-1,1] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Zapiši porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.
   (b) Kakšna je verjetnost, da je $X \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$?
   (c) Izračunaj $n-$ti začetni moment slučajne spremenljivke X, $E(X)$ in $D(X)$.

3. Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} ay^2e^{-x} & ; x \geq 0,\ y \in [-1,1] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_{X,Y}(x,y)$ in robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$.
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. V 300 metih kocke smo preštevali sode in lihe vrednosti. Dobili smo naslednje rezultate

soda vrednost	liha vrednost
110	190

   Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezi, da
   (a) je kocka poštena;
   (b) se sodo število pojavlja dvakrat pogosteje?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 21.1.2000

1. Celoštevilska slučajna spremenljivka X je definirana rekurzivno s predpisom

$$p_0 = P[X=0] = \frac{1}{1+a}, \quad p_n = P[X=n] = \frac{a}{1+a} p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

   (a) Dokaži, da je z danim predpisom res definirana slučajna spremenljivka X in izračunaj njeno verjetnostno in porazdelitveno funkcijo.

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo, $E(X)$ in $D(X)$.

2. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X porazdeljena z gostoto $p(x)$.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = |X|$?

   (b) Dokaži, da imata slučajni spremenljivki X in Y enake sode začetne momente.

3. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} ae^{-x-y} & ; x, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto a.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo in gostoto slučajnega vektorja (U, V), kjer je $U = \max\{X, Y\}$ in $V = X + Y$.

4. V 210-tih metih kocke smo dobili naslednje rezultate

x_k	1	2	3	4	5	6
m_k	15	18	26	42	53	56

   Ali so eksperimentalni razultati na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ v nasprotju s hipotezo, da je metanje kocke X porazdeljeno linearno, t.p. $p_k = P[X=k] = ka$, kjer je $k = 1, 2, ..., 6$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 15.5.2000

1. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ |x-1| + |y-1| \leq 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$
Izračunaj regresijsko funkcijo $E(X|y)$ slučajne spremenljivke X glede na Y.

2. V nekem jezeru je N rib. Da bi približno ocenili njihovo število, so vanj spustili 100 označenih rib. Čez nekaj časa so ulovili 400 rib in med njimi je bilo 5 označenih rib. Poišči čimožji interval $[a, b]$, da bomo z verjetnostjo vsaj 95% trdili, da je v jezeru med a in b rib. Pomoč: uporabi Laplaceov limitni izrek
$$P\left(\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right| \leq \alpha_{0.95}\right) \approx 2\Phi(\alpha_{0.95}) .$$

3. Naj bo $p(x) = e^{-2|x|}$ gostota zvezne slučajne spremenljivke X. Izračunaj njeno karakteristično funkcijo $f_X(t)$ in s pomočjo karakteristične funkcije izračunaj $n-$ti začetni moment slučajne spremenljivke X.

4. Vnet obiskovalec Štuka in Trusta gre vsak večer na Štuk ali v Trust, vendar v Trust ne gre dva večera zaporedoma. Če gre na Štuk je enako verjetno, da gre naslednji večer na Štuk kot v Trust.
   (a) Obiskovanje študenta predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti).
   (b) Zvečer je bil študent na Štuku. Kakšna je verjetnost, da bo po $n-$večerih spet na Štuku?
   (c) Klasificiraj obe stanji markovske verige. Po koliko dneh se študent v povprečju spet vrne v Trust?

Točke so razporejene ob nalogah.