Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 1.12.2000

1. Imamo dogodke A, B, C in njihove verjetnosti $P(A), P(B), P(C)$. Izračunaj naslednje verjetnosti: $P(A \cup B)$, $P(AC)$, $P(A \cup B \cup C)$ in $P(ABC)$, če veš, da sta dogodka A in B nezdružljiva ter je

   (a) dogodek C neodvisen od A in B;

   (b) $P(C|A) = \frac{1}{2}$ in $P(B|C) = \frac{1}{2}$.

2. Na daljici AB z dolžino $2l$ naključno in neodvisno izberemo dve točki. Kakšna je verjetnost, da je razdalja med točkama večja od $\frac{l}{2}$ in manjša od l?

3. Imamo tri komplete po 20 igralnih kart za "šnops". Prvi komplet kart je pošten, vsebuje 4 ase, drugi komplet, kjer sta dva rdeča asa podvojena, vsebuje 6 asov in tretji komplet kart vsebuje 8 asov, vsi asi so podvojeni. Igralec naključno izbere igralni komplet kart in iz njega naključno potegne 4 karte.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je pri tem dobil dva asa?

   (b) Kakšna je verjetnost, da je izbral pošteni igralni paket kart, če sta bila potegnjena dva asa?

   (c) Kakšna je verjetnost, da igralec v tem primeru odkrije goljufijo?

4. Imamo zaporedje poskusov, kjer je v vsaki ponovitvi poskusa verjetnost dogodka A enaka p, $0 < p < 1$. Kakšna je verjetnost, da se je dogodek A zgodil petič natanko v sedmi ponovitvi poskusa?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 1.12.2000

1. O dogodkih A in B vemo, da je $P(A) = P(B)$, $P(A|B) = 2P\left(A|\overline{B}\right)$ in $P\left(\overline{AB}\right) = \frac{1}{3}$. Izračunaj verjetnosti $P(A)$ in $P(A|B)$.

2. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila x, y, z. Označimo naslednja dogodka:

   A - s stranicami, ki imajo dolžine x, y, z, ni možno sestaviti trikotnika;

   B - vsota $x + y + z$ je manjša od 1.

   Izračunaj verjetnost $P(A)$ in $P(A|B)$.

3. Imamo tri komplete po 20 igralnih kart za "šnops". Prvi komplet kart je pošten, vsebuje 4 ase, drugi komplet, kjer sta dva rdeča asa podvojena, vsebuje 6 asov in tretji komplet kart vsebuje 8 asov, vsi asi so podvojeni. Igralec naključno izbere igralni komplet kart in iz njega naključno potegne 4 karte.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je pri tem dobil dva asa?

   (b) Kakšna je verjetnost, da je izbral pošteni igralni paket kart, če sta bila potegnjena dva asa?

   (c) Kakšna je verjetnost, da igralec v tem primeru odkrije goljufijo?

4. V škatli imamo veliko število enako velikih kroglic, ki so pobarvane z r različnimi barvami. Iz škatle naključno potegnemo kroglico in jo vrnemo. Naj bo verjetnost, da smo potegnili kroglico $i-$te barve, enaka $p_i = \lambda \cdot i$.

   (a) Izračunaj konstanto λ.

   (b) Kakšna je verjetnost, da smo v n ponovitvah poskusa k_i krat potegnili kroglico $i-$te barve, pri čemer je $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 23.1.2001

1. V vrečki je 5 rdečih in 3 bele kroglice. Hkrati izberemo slučajno 3 kroglice. Število rdečih kroglic med njimi je slučajna spremenljivka X.

   (a) Zapiši zalogo vrednosti in verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   (b) Izračunaj verjetnost dogodkov:
   A : vsaj 2 izbrani kroglici sta rdeči,
   B : vse izbrane kroglice niso hkrati rdeče in bele.

   (c) Nariši graf porazdelitvene funkcije ter izračunaj $E(X)$.

2. Porazdelitvena funkcija zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke ima obliko

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \leq 1 \\ a \ln x & ;\ 1 < x < e \\ 1 & ;\ e \leq x \end{cases} .$$

   (a) Zapiši gostoto porazdelitve $p(x)$ ter izračunaj konstanto a.

   (b) Izračunaj verjetnost dogodkov: $x < 2$; $0,5 \leq x < e - 1$; $x \geq 3$.

   (c) Izračunaj matematično upanje, disperzijo, mediano in semikvartilni razmik.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}axy^2 + ye^{2x} & ;\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   Določi konstanto a in izračunaj robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$.

4. V vsaki ponovitvi poskusa se dogodek A zgodi z verjetnostjo p. Poskus smo ponovili 100 krat. Kololiko krat se še dogodek A lahko zgodi, da hipoteze $H_0\left(p = \frac{1}{4}\right)$ ne moremo zavrniti na stopnji tveganja $\alpha = 0.05$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 23.1.2001

1. V podjetju, ki se ukvarja z vrtanjem termalne vode so izračunali, da z verjetnostjo $p = 0.09$ pri vrtanju naletijo na termalno vodo. Naj slučajna spremenljivka X meri število poskusnih vrtanj, ki so potrebna, da naletijo na vodo tretjič.
   (a) Kolikokrat je treba opraviti poskusno vrtanje, da z verjetnostjo večjo od $\frac{15}{16}$ pridemo do vode.
   (b) Kakšna je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X?
   (c) Zapiši rodovno funkcijo $G_X(t)$ in s pomočjo tega izračunaj matematično upanje $E(X)$ ter disperzijo $D(X)$ slučajne spremenljivke X.

2. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka podana z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} 25ax(5x-7)^7 + \frac{25}{18} & ;\ \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj $E(X)$, $D(X)$ slučajne spremenljivke X.
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = \ln X$?

3. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto
$$p(x, y) = \begin{cases} e^{y-x} & ;\ x > 0,\ y < 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$
   (a) Kakšni sta robni porazdelitvi $p_X(x)$ in $p_Y(y)$ komponent X in Y?
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \frac{-X+\sqrt{X^2-4Y}}{2}$?

4. Proizvajalec športne opreme je na osmih atletih preizkušal učinkovitost dveh tipov posebej prilagojenih čevljev za tek na 5000m. Slučajni spremenljivki X in Y naj merita število sekund, ki jih v povprečju atlet pridobi z uporabo teh čevljev (1. in 2. tip):

atleti	1	2	3	4	5	6	7	8
X	$4,2$	$-0,5$	$-5,1$	$6,2$	$4,3$	3	$2,5$	$9,7$
Y	$2,1$	$6,3$	$-2,1$	$8,3$	$10,1$	1	$10,5$	$17,6$

Ali lahko s temi podatki na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ zavrnemo hipotezo, da sta oba tipa čevljev enako učinkovita?

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 16.3.2001

1. Slučajni vektor (X, Y) je mešanega tipa, tako je Y diskretna slučajna spremenljivka
$$p_k\left(P\left[Y=k\right]\right)=\frac{2}{3^k}\,,\quad k=1,2,\ldots$$
in X zvezna, pri čemer je slučajna spremenljivka $X|Y$ porazdeljena z gostoto
$$p\left(x|Y=y\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}y\left(1-\frac{x}{2}\right)^{y-1} & ;\, x\in[0,2]\\ 0 & ;\,\text{sicer}\end{cases}.$$
Kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y) in kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X?

2. (a) V populaciji je verjetnost, da se rodi deček enaka $p = 0.51$. Kakšna je verjetnost, da je med 1000 novorojenčki več dečkov kot deklic? Kakšna je vejetnost, da je vsaj 10 deklic več kot dečkov?
   (b) Na velikem parkirišču lahko avtomobil parkiramo naprej ali vzvratno. V vzorcu 70 avtomobilov jih je bilo 49 parkiranih naprej. Na stopnji zaupanja 0.95 določi interval zaupanja za verjetnost, da je naključno izbrani avtomobil parkiran naprej.

3. Zvezna slučajna spremenljivka X naj bo enakomerno porazdeljena na intervalu $[-a, a]$, $a > 0$. Izračunaj karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Y = \ln|X|$.

4. Ponavljamo poskus, v katerem ima dogodek A verjetnost p. Temu zaporedju priredimo markovsko verigo s predpisom: veriga ja v n-ti ponovitvi poskusa v stanju

   E_1, če se je v $n-1$ in n-tem poskusu zgodil dogodek A;

   E_2, če se je v $(n-1)$-tem poskusu zgodil dogodek $\overline{A}$ in n-tem poskusu dogodek A;

   E_3, če se je v $(n-1)$-tem poskusu zgodil dogodek A in n-tem poskusu dogodek $\overline{A}$;

   E_4, če se je v $n-1$ in n-tem poskusu zgodil dogodek $\overline{A}$;

   (a) Za to markovsko verigo zapiši matriko prehoda P in izračunaj P^n, $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Klasificiraj stanja E_1, E_2, E_3, E_4 in zapiši stacionarno porazdelitev!

Naloge so enakovredne.