Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 6. 12. 2001

1. Imamo 12 knjig, od tega jih je 5 poljudno znanstvenih, 4 so leposlovne in 3 so slovarji. Knjige naključno zložimo na ravno polico. Kakšna je verjetnost, da stojijo po zlaganju vse knjige iste vrste skupaj?

2. Z intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Označimo dogodka:

   $A-$ razdalja med izbranima številoma ne presega 1,

   $B-$ absolutna vrednost vsote je manjša od 1.

   Izračunaj $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ in $P(A|B)$.

3. (a) Sočasno vržemo dve pošteni igralni kocki. Kakšna je verjetnost, da je vsota pik večja od 7, če vemo, da sta na vsaki kocki padli vsaj 2 piki?

   (b) Izmed 20 kart za "šnops" naključno potegnemo 4 karte. Med njimi je vsaj en as. Kakšna je verjetnost, da je med njimi še kakšen as?

4. Imamo tri enake posode v katerih so kroglice. V prvi sta 2 črni in 4 bele, v drugi 4 črne in 2 beli, v tretji 3 črne in 3 bele. Vržemo pošteno igralno kocko. Če pade sodo število pik, izberemo prvo posodo, če pade 1 ali 3, izbereno drugo posodo, in če pade 5, izberemo tretjo posodo. Nato iz izbrane posode naključno izvlečemo dve kroglici.

   (a) Kakšna je verjetnost, da sta izbrani kroglici obe beli?

   (b) Izvlekli smo kroglici bele barve. Kakšna je verjetnost, da je pri metu kocke padlo 5 pik?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3. 12. 2001

1. Imamo n škatlic, od tega jih je n_1 prve barve, n_2 druge barve in n_k $k-$te barve. Škatlice naključno zložimo na ravno polico oz. okroglo polico. Kakšna je verjetnost, da stojijo po zlaganju vse škatlice iste barve skupaj? Katera verjetnost je večja?

2. Na daljici z dolžino 6 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A : vsaj ena od točk je od razpolovišča daljice oddaljena manj kot 1 cm,

   B : vsota razdalj točk od razpolovišča daljice ne presega 3 cm,

   in koliko je $P(A|B)$?

3. V posodi imamo 6 belih in 4 črne kroglice. Imamo tri igralce. Po vrstnem redu igralec iz posode naključno izbere dve kroglici in ju nato vrne. Igra se konča, ko igralec izvleče kroglici iste barve. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je prvi, drugi ali tretji na potezi? Kakšne pa so te verjetnosti, če kroglic po izbiri ne vračamo?

4. V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 3 črne, v drugi žari 1 bela in 2 črni ter v tretji 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo žaro, nato pa kroglico iz druge v tretjo žaro. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje žare.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna?

   (b) Na koncu je bila izbrana kroglica črne barve. Kakšna je verjetnost, da smo pri tem iz prve v drugo žaro prenesli belo kroglico?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika in računalništvo z matematiko

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 3. 12. 2001

1. Imamo n škatlic, od tega jih je n_1 prve barve, n_2 druge barve in n_k $k-$te barve. Škatlice naključno zložimo na ravno polico oz. okroglo polico. Kakšna je verjetnost, da stojijo po zlaganju vse škatlice iste barve skupaj? Katera verjetnost je večja?

2. Na daljici z dolžino 6 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

   A : vsaj ena od točk je od razpolovišča daljice oddaljena manj kot 1 cm,

   B : vsota razdalj točk od razpolovišča daljice ne presega 3 cm,

   in koliko je $P(A|B)$?

3. Igralca izmenično mečeta kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je p. Igra se konča, ko pri metih grb pade drugič. Zmagovalec je tisti, pri katerem se je to zgodilo.

   (a) Kakšna je verjetnost, da se v $n-$tem poskusu metanja grb pojavi drugič?

   (b) Kakšna je verjetnost, da zmaga posamezni igralec?

4. V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 3 črne, v drugi žari 1 bela in 2 črni ter v tretji 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo žaro, nato pa kroglico iz druge v tretjo žaro. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje žare.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna?

   (b) Na koncu je bila izbrana kroglica črne barve. Kakšna je verjetnost, da smo pri tem iz prve v drugo žaro prenesli belo kroglico?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 24. 1. 2002

1. Na poti gibanja avtomobila so 4 semaforji. Verjetnost, da je posamezni semafor prepusten je $p = 0.6$. Naj slučajna spremenljivka X meri število semaforjev, ki jih je avtomobil prevozil do prve zaustavitve.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo in porazdelitveno funkcijo!
   (b) Koliko semaforjev bomo v povprečju prevozili do prve zaustavitve?

2. Zvezna slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x| & ; |x| \leq 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases} .$$
   (a) Preveri, da $p(x)$ res gostota slučajne spremenljivke X in skiciraj njen graf.
   (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo F_X.
   (c) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$ ter n-ti začetni moment.

3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F_X(x) = \begin{cases} a - e^{-2x} & ; x \geq 0 \\ b & ; x < 0 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija ter skiciraj njen graf.
   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučane spremenljivke X in $P[1 < X < 2]$.
   (c) Izračunaj mediano in semikvartilni razmik.

4. V igralnici se pri igri na srečo istočasno mečejo trije kovanci, ki so po zagotovilu igralnice pošteni. Število grbov x_j in njihova frekvenca m_j pri 80-tih metih je podana v tabeli:

x_j	0	1	2	3
m_j	6	21	38	15

   Ali lahko na osnovi teh podatkov s 5% tveganjem obtožimo igralnico za goljufanje?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 23. 1. 2002

1. Igralca izmenično mečeta kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{4}$. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb in zasluži toliko tolarjev kolikokrat sta metala. Število zasluženih tolarjev naj bo slučajna spremenljivka X.

   (a) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X pri igralcu, ki je igro začel.

   (b) Zapiši rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X pri igralcu, ki je igro začel.

   (c) Kolikšen je njegov povprečni zaslužek?

2. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} a - e^{-2x} & ;\ x \geq 0 \\ b & ;\ x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija ter skiciraj njen graf.

   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučane spremenljivke X in $P[1 < X < 2]$.

   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) podan z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} axye^{-\left(x^2+y^2\right)} & ;\ x, y \geq 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   (a) Določi konstanto a.

   (b) Izračunaj robni porazdelitvi p_X, p_Y. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$.

4. V igralnici se pri igri na srečo istočasno mečejo trije kovanci, ki so po zagotovilu igralnice pošteni. Število grbov x_j in njihova frekvenca m_j pri 80-tih metih je podana v tabeli:

x_j	0	1	2	3
m_j	6	21	38	15

   Ali lahko na osnovi teh podatkov s 5% tveganjem obtožimo igralnico za goljufanje?

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika in rač. z matematiko

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 23. 1. 2002

1. Na poti gibanja avtomobila je n semaforjev. Verjetnost, da je posamezni semafor prepusten je p. Naj slučajna spremenljivka X_n meri število semaforjev, ki jih je avtomobil prevozil do prve zaustavitve.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X_n? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo in porazdelitveno funkcijo!
   (b) Zapiši rodovno funkcijo $G_{X_n}(t)$ in izračunaj $E_n(X)$.
   (c) Izračunaj $\lim_{n\to\infty} E_n(X)$.

2. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto
$$p(x) = \begin{cases} ax^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj n-ti začetni moment slučajne spremenljivke X, $E(X)$ in $D(X)$.

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) podan z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} axye^{-\left(x^2+y^2\right)} & ; \ x, y \geq 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$
   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj robni porazdelitvi p_X, p_Y. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \min\{X, Y\}$

4. Življenska doba žarnic X je porazdeljena po normalnem zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Proizvajalec je na vzorcu $n = 21$ žarnic izračunal vzorčno povprečje $\overline{X} = 1000\ ur$ in $\sum\left(X - \overline{X}\right)^2 = 312500\ ur^2$. V katerih mejah lahko leži a, da hipoteze $H_0\left(E(X) = a\right)$ na stopnji zaupanja $\alpha = 0.05$ ne moremo zavrniti.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 18. 4. 2002

1. Naj bo slučajni vektor (X, Y) enakomerno porazdeljen na polkrogu $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.
   (a) Določi gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke $Y|X$.
   (b) Izračunaj regresijo $E(Y|X)$.
2. Pri nočnem letu letala je osvetljen koridor višine 100 m, kjer je predvidena višina leta na sredini koridorja. Zaradi sistemske napake leti letalo v povprečju 20 m više od predvidene višine. Slučajna napaka pri letu letala je porazdeljena normalno s standardnim odklonom 40 m.
   (a) Kakšna je verjetnost, da letalo leti znotraj osvetljenega koridorja?
   (b) Kakšna je verjetnost, da je letalo nad osvetljenim koridorjem?
3. Zvezna slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Poišči karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke X in s pomočjo nje izračunaj n-ti začetni moment, $E(X)$ in $D(X)$.
4. Trgovski potnik vsak dan obišče eno od mest Maribor, Ljubljana in Koper. Če je bil v Mariboru ali v Kopru, gre nasledji dan vedno v Ljubljano. Če je bil v Ljubljani, pa je naslednji dan v Mariboru z verjetnostjo $1 > p > 0$ oz. gre v Koper z verjetnostjo $q = 1 - p$.
   (a) Gibanje trgovskega potnika predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti P) in izračunaj P^n za $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Za posamezni kraj izračunaj $v(n)$ - verjetnost, da se trgovski potnik po n dnevih prvič vrne v začetni kraj.
   (c) Klasificiraj stanja markovske verige! Ali obstaja stacionarna porazdelitev? Ali je markovska veriga ergodijska?

Točke so porazdeljene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

POPRAVLJALNI KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 6. 5. 2002

1. Slučajni spremenljivki X_1 in X_2 sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Naj bosta $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ in $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$.
   (a) Določi gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke Y_2, slučajnega vektorja (Y_1, Y_2) in pogojne slučajne spremenljivke $Y_1|Y_2$.
   (b) Izračunaj regresijsko funkcijo slučajne spremenljivke Y_1 glede na spremenljivko Y_2.

2. V nekem mestu so z anketo ugotovili, da 54% moških kadilcev. Najdi $99,8\%$ interval zaupanje za verjetnost, da je naključno izbrani moški iz tega mesta kadilec, če veš, da je v anketi sodelovalo 100 moških.

3. Zapiši karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke Y, če je
   (a) Y celoštevilska slučajna spremenljivka s porazdelitvijo $P(Y = n) = \frac{2}{3^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2...$;
   (b) $Y = \ln|X|$, kjer je X zvezno enakomerno porazdeljena na intervalu $[-1, 1]$.

4. V ribniku živi žaba, ki se z enako verjetnostjo nahaja na lokvanju, v vodi ali na kopnem. Z lokvanja žaba vedno skoči bodisi v vodo bodisi na kopno. Prav tako iz vode žaba vedno skoči na lokvanj ali na kopno. Če je žaba na kopnem, potem je enako verjetno, da tu tudi ostane, kot da skoči bodisi v vodo bodisi na lokvanj.
   (a) Gibanje žabe predstavi z markovsko verigo, matriko prehodnih vrednosti.
   (b) S kolikšnimi verjetnostmi se žaba po n korakih nahaja na lokvanju, v vodi ali na kopnem?
   (c) Po koliko skokih se v povprečju žaba vrne nazaj na lokvanj, v vodo oz. na kopno?

Točke so porazdeljene po nalogah: $30 + 20 + 25 + 25$.