Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 5. 12. 2002

1. Na koliko načinov lahko:
   (a) 5 rdečih, 4 modre in 3 zelene kroglice zložimo v vrsto tako, da modre kroglice stojijo skupaj;
   (b) 5 bankovcev po 1000 SIT in 4 bankovce po 500 SIT razdelim med dva človeka;
   (c) izmed 20-tih kart za šnops izberem 5 kart, tako da dobim dva asa;
   (d) izmed štirimestnih števil izberem sodo število z samimi različnimi števkami?

2. Poštena igralna kocka ima tri ploskve pobarvane z belo, dve z rdečo in eno z modro barvo. Kocko vržemo 5 krat.
   (a) Kakšna je verjetnost, da bo kocka pri tem vsaj dvakrat padla na rdečo ploskev?
   (b) Kakšna je verjetnost, da bo kocka padla na belo in modro ploskev enakokrat?

3. Z intervala $[0, 4]$ naključno izberemo dve števili. Označimo naslednja dogodka:

   A- števili sta vsaj 1 enoto oddaljeni od krajišč intervala;

   B- razdalja med številoma presega 1 enoto.

   Kakšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A \cup B)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$?

4. V treh posodah so kroglice, v prvi 5 belih in 5 rdečih, v drugi 4 bele in 8 rdečih ter v tretji 9 belih in 3 rdeče.
   (a) Kaj je verjetnejše, da se iz druge posode izvleče bela kroglica ali da se iz naključno izbrane posode izvleče bela kroglica?
   (b) Iz naključno izbrane posode smo izvlekli dve rdeči kroglici. Kakšna je verjetnost, da je bila izbrana prva posoda?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 5. 12. 2002

1. Poštena igralna kocka ima tri ploskve pobarvane z belo, dve z rdečo in eno z modro barvo. Kocko vržemo 5 krat.

   (a) Kakšna je verjetnost, da bo kocka pri tem vsaj dvakrat padla na rdečo ploskev?

   (b) Kakšna je verjetnost, da bo kocka padla na belo in modro ploskev enakokrat?

2. Z intervala $[-a, a]$, kjer je $a > 1$, naključno izberemo dve števili. Označimo naslednje dogodke:

   A- absolutna vrednost vsote izbranih števil je manjša od a;

   B- vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je manjša od a;

   C- produkt izbranih števil je manjši od a.

   (a) Kakšne so verjetnosti dogodkov $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(B|A)$ in $P(A|B)$?

   (b) Določi a tako, da bo $P\left(A\overline{C}\right) = 0$.

3. V denarnici imamo 5 bankovcev po 100 SIT, 4 bankovce po 200 SIT, 3 bankovce po 500 SIT in 2 bankovca po 1000 SIT. Iz denarnice naključno potegnemo tri bankovce.

   (a) Kakšna je verjetnost, da s tem denarjem plačamo kosilo, ki stane 810 SIT?

   (b) Kakšna je verjetnost, da imajo bankovci različno vrednost?

   (c) Kakšna je verjetnost, da lahko plačamo kosilo, ki stane 810 SIT, če imamo bankovce različnih vrednosti?

4. Imamo N posod in v vsaki n belih in m rdečih kroglic. Iz prve posode naključno izberemo kroglico in jo prenesemo v drugo, nato se iz druge posode naljučno prenese kroglica v tretjo in tako naprej do zadnje posode. Kakšna je verjetnost, da na koncu iz zadnje posode izvlečemo belo kroglico? (Pomoč: reši nalogo za $N = 1, 2, 3$ in nato svojo trditev dokaži.)

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 27. 11. 2002

1. Imamo m kroglic modre barve, r kroglic rdeče in z kroglic zelene barve, $m, r, z \geq 3$. Kroglice razdelimo med tri otroke. Predpostavimo, da so vse možne razdelitve enakoverjetne.
   (a) Na koliko načinov lahko kroglice razdelimo med otroke?
   (b) Kakšna je verjetnost, da imajo otroci kroglice vseh treh barv?
   (c) Kakšna je verjetnost, da en otrok ostane brez kroglic?

2. Z intervala $[0, l]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

   $A-$ vsota teh števil je manjša od $2l$;

   $B-$ vsota prvih dveh števil, je večja od tretjega;

   $C-$ z daljicami izbranih dolžin lahko sestavimo trikotnik.

   Izračunaj verjetnosti: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(C|A)$ in $P\left(C|\overline{AB}\right)$.

3. V žepu imamo 3 kovance po 1 SIT, 5 kovancev po 2 SIT, 4 kovance po 5 SIT in 4 kovance po 10 SIT.
   (a) Iz žepa naključno potegnemo tri kovance. Kakšna je verjetnost, da je vrednost izvlečenih kovancev vsaj 7 SIT?
   (b) Iz žepa naključno potegnemo dva kovanca. Kakšna je verjetnost, da je vrednost prvega kovanca 10 SIT, če ima prvi kovanec večjo vrednost od drugega?

4. Verjetnost, da v igri zmaga prvi igralec je p, da zmaga drugi igralec pa $q = 1 - p$. Trije igralci A, B in C igrajo to igro po naslednjih pravilih: najprej igrata igralca A in B, pri tem je A prvi igralec, potem zmagovalec dvoboja, ki ostaja prvi igralec, igra z igralcem C. Torej, vedno se poraženec umakne iz igre in zmagovalec kot prvi igralec igra s preostalim. Igra se konča, ko igralec zmaga v dveh zaporednih dvobojih. Kakšne so verjetnosti za zmago posameznega igralca? Kakšne so te verjetnosti, če je igra poštena t.p. $p = 0.5$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 17. 4. 2003

1. Študent ima 7 parov zvezkov (predavanje in vaje) iz različnih predmetov. Naključno izbere 8 zvezkov. Izračunaj verjetnost, da pri tem:

   (a) ne dobi nobenega skupnega para;

   (b) dobi i, $i = 1, 2, 3, 4$, kompletnih parov zvezkov.

2. Na daljici z dolžino 8 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Kolikšna je verjetnost dogodkov:

   A- vsaj ena točka je od središča daljice oddaljena več kot 2 cm,

   B- razdalja med točkama presega 2 cm,

   izračunaj še verjetnosti $P(A|B)$ in $P(B|A)$.

3. V prvi posodi so 3 bele in 2 črni kroglici, v drugi 2 beli in 2 črni ter v tretji 2 črni in 1 bela kroglica. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo posodo, nato prenesemo 2 kroglici iz druge v tretjo in nazadnje izberemo kroglico iz tretje posode.

   (a) Kakšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali belo kroglico?

   (b) Kakšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili belo kroglico, če je bila na koncu izbrana bela kroglica?

4. V posodi imamo 4 bele in 1 rdečo kroglico. Naključno izberemo kroglico in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka T meri število izbir, ki so potrebne, da je bela kroglica izbrana drugič.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka T? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo!

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo $G_T(t)$ in matematično upanje $E(T)$.

Točke so razporejene po naloga: $20 + 25 + 30 + 25$.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

2. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTI

Maribor, 20. 1. 2003

1. V posodi imamo 5 črnih in 4 bele kroglice. Iz posode naključno naenkrat izvlečemo 4 kroglice. Število črnih izvlečenih kroglic je slučajna spremenljivka X.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo, porazdelitveno funkcijo in rodovno funkcijo.
   (b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

2. Palico dolžine $2l$ naključno prelomimo na dva dela. Dolžina krajšega dela palice je slučajna spremenljivka X.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in nato še gostoto $p(x)$.
   (b) Koliko meri povprečna dolžina krajšega dela palice?

3. Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{bx+1}{x+2} & ;\ x \geq -1 \\ a & ;\ x < -1 \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanti a in b tako, da bo F_X res porazdelitvena funkcija.
   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve slučane spremenljivke X in $P[-3 < X < 2]$.
   (c) Izračunaj $E(X)$, če obstaja, sicer izračunaj mediano.

4. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena normalno $\mathcal{N}(a, \sigma)$ z znanim $\sigma = 2$. Po 25-tih realizacijah X smo dobili naledNje podatke:

x_j	-4	-2	-1	0	1	2
n_j	3	5	6	7	1	3

   kjer je n_j število realizacij vrednosti x_j. Ali lahko na osnovi teh podatkov s tveganjem $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je $a = 0$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 20. 1. 2003

1. Naj bo
$$G_X(t) = \frac{at}{1-bt}\ .$$
   (a) Določi zvezo med a in b, da bo $G_X(t)$ rodovna funkcija diskretne slučajne spremenljivke X.
   (b) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunaj še $E(X)$ ter $D(X)$.

2. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen enakomerno na intevalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Naj zvezna slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato še gostoto. Kolikšna je povprečna ploščina romba?

3. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ; x, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\ .$$
   (a) Kakšni sta robni porazdelitvi p_X in p_Y komponent X in Y? Ali sta X in Y neodvisni?
   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$?

4. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena normalno $\mathcal{N}(a, \sigma)$ z znanim $\sigma = 2$. Po 25-tih realizacijah X smo dobili naledIn podatke:

x_j	-3	-2	-1	0	1	2
n_j	3	5	6	7	1	3

kjer je n_j število realizacij vrednosti x_j.

   (a) Ali lahko na osnovi teh podatkov s tveganjem $\alpha = 0.05$ zavrnemo hipotezo, da je $a = 0$?
   (b) Določi 95% interval zaupanja za a!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 24. 1. 2003

1. Istočasno vržemo n poštenih igralnih kock. Maksimalno število padlih pik naj bo slučajna spremenljivka X in minimalno število pik naj bo slučajna spremenljivka Y.
   (a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y? Izračunaj najprej njuni porazdelitveni funkciji!
   (b) V primeru $n = 3$ zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja (X, Y).

2. Palico dolžine $2l$ naključno prelomimo. Dobljena dela palice sta sosednji stranici pravokotnika. Slučajna spremenljivka X naj meri ploščino dobljenega pravokotnika.
   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in nato še gostoto $p(x)$!
   (b) Kolikšna je povprečna ploščina tako dobljenega pravokotnika?
   (c) Kakšna je verjetnost, da bo ploščina pravokotnika manjša od $\frac{2}{3}$ največje možne ploščine?

3. Naj bo slučajni vektor (X, Y) podan z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^{2n+1}y^{2m+1}e^{-x^2-y^2} & ;\ x, y \geq 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} \quad , \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

   (a) Določi konstanto a.
   (b) Izračunaj robni porazdelitvi p_X, p_Y. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?
   (c) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

4. Na avtomatu za polnjenje sladkorja v vrečke piše, da je standardni odklon teže sladkorja pri pakiranju 1 kg enak 0.02 kg. Na vzorcu 16-tih vrečk so ugotovili vzorčno povprečje $\overline{x} = 1.025$ in izračunali $\sum (x_k - \overline{x})^2 = 0.015$. Na osnovi teh podatkov in stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezi:

   $H_0\,(a = 1)$ proti alternativni hipotezi $H_1(a \neq 1)$ in

   $H_0\,(\sigma = 0.02)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\sigma \neq 0.02)$.

Univerza v Mariboru
FERI-Telekomunikacije
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 5. 6. 2003

1. Celoštevilska diskretna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{t}{3-2t}.$$

   (a) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X!

   (b) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunaj verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti z intervala $(1, 4]$.

2. Palico dolžine $2l$ naključno prelomimo na dva dela. Dolžina krajšega dela palice je slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in nato še gostoto $p(x)$.

   (b) Koliko meri povprečna dolžina krajšega dela palice?

3. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X podana z gostoto

$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 e^{-|x|}.$$

   (a) Izračunaj k-ti začetni moment slučajne spremenljivke X, $E(X)$ in $D(X)$!

   (b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^X$?

4. V 210-tih metih kocke smo dobili naslednje rezultate

x_k	1	2	3	4	5	6
m_k	15	18	26	42	53	56

.

   Ali so eksperimentalni razultati na osnovi tveganja $\alpha = 0.05$ v nasprotju s hipotezo, da je metanje kocke X porazdeljeno linearno, t.p. $p_k = P[X = k] = ka$, kjer je $k = 1, 2, ..., 6$?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 4. 4. 2003

1. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen na polkrogu $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ z gostoto $p(x, y)$, ki je sorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke (x, y) od izhodišča.
   (a) Določi gostoto $p(x, y)$.
   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke $Y|X$.
   (c) Izračunaj regresijo $E(Y|X)$.
2. Z merilcem razdalje merimo oddaljenost nekega objekta. Zaradi sistemske napake merilca je dejanska oddaljenost objekta manjša za 50 metrov. Slučajna napaka pri merjenju je porazdeljena normalno s standardnim odklonom 100 metrov. Kakšna je verjetnost, da pri merjenju nismo zagrešili napake večje od 150 metrov? Kakšna je verjetnost, da izmerjena oddaljenost ni večja od dejanske?
3. Naj bo $f_X(t) = \frac{1-it}{1+t^2}$ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X. Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke X. Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X?
4. V nekem kraju veljajo za vreme naslednje ugotovitve: če je nekega dne tam slabo vreme, ostane slabo tudi naslednji dan z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Če pa je vreme lepo, ostane tako z verjetnostjo $\frac{3}{4}$.
   (a) Spreminjanje vremena predstavi z markovsko verigo.
   (b) Kakšna je verjetnost, da bo vreme po n dnevih spet lepo, če je sedaj lepo?
   (c) Klasificiraj obe stanji markovske verige. Po koliko dneh se v povprečju ponovi slabo vreme?

Točke so razdeljene po nalogah: $30 + 15 + 25 + 30$.