Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Skupina A

Maribor, 3. 12. 2004

1. (a) V škatli so bele, črne, rdeče in zelene kroglice. Na koliko načinov lahko izvlečemo pet kroglic, če izvlečeno kroglico vsakič vrnemo v škatlo in vrstni red kroglic ni važen?
   (b) Nogometno moštvo mora odigrati do konca prvenstva še pet tekem, v katerih načrtuje dve zmagi, dva poraza in en neodločen rezultat. Na koliko načinov lahko uresniči načrt?

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili a in b. Kolikšna je verjetnost, da ima kvadratna enačba $x^2 - 2bx + a = 0$ realne rešitve?

3. Andrej, Bojan, Ciril in Damjan streljajo v tarčo. Andrej in Bojan streljata z rdečimi, Ciril in Damjan pa z modrimi puščicami. Andrej zadene tarčo z verjetnostjo 0.6, Bojan z verjetnostjo 0.7, Ciril z verjetnostjo 0.5 in Damjan z verjetnostjo 0.9. Vsi hkrati neodvisno drug od drugega ustrelijo proti tarči. Naj bo A dogodek, da sta tarčo zadeli natanko ena rdeča in vsaj ena modra puščica in B dogodek, da sta samo Andrej in Damjan zadela tarčo. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.

4. V prvi posodi so tri bele in ena rdeča kroglica, v drugi sta dve beli in dve rdeči ter v tretji dve beli in ena rdeča kroglica. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili enakobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili belo kroglico?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

1. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Skupina B

Maribor, 3. 12. 2004

1. (a) V posodi je 6 kroglic, oštevilčenih od 1 do 6. Na slepo izvlečemo štiri kroglice tako, da izvlečeno kroglico vsakič spet vrnemo v posodo. Koliko izidov je mogočih, če vrstni red kroglic ni važen?
   (b) Košarkaška ekipa mora odigrati do konca prvenstva še 6 tekem, v katerih načrtuje tri zmage, en poraz in dva neodločena rezultata. Na koliko načinov lahko uresniči načrt?

2. Z intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili a in b. Kolikšna je verjetnost, da kvadratna enačba $x^2 + 2ax + b = 0$ nima realnih rešitev?

3. Andrej, Bojan, Ciril in Damjan streljajo v tarčo. Andrej in Bojan streljata z rdečimi, Ciril in Damjan pa z modrimi puščicami. Andrej zadene tarčo z verjetnostjo 0.6, Bojan z verjetnostjo 0.7, Ciril z verjetnostjo 0.5 in Damjan z verjetnostjo 0.9. Vsi hkrati neodvisno drug od drugega ustrelijo proti tarči. Naj bo A dogodek, da sta tarčo zadeli vsaj ena rdeča in natanko ena modra puščica in B dogodek, da sta samo Bojan in Ciril zadela tarčo. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ in $P(B|A)$.

4. V prvi posodi so tri bele in ena rdeča kroglica, v drugi sta dve beli in dve rdeči ter v tretji dve beli in ena rdeča kroglica. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili raznobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili rdečo kroglico?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE
Skupina A

Maribor, 3. 12. 2004

1. Vržemo tri poštene igralne kocke. Njihovi meti so med seboj neodvisni. Naj bo A dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva s 5 in B dogodek, da sta vsaj pri eni kocki padli dve piki. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ in $p(B|A)$. Ali sta dogodka A in B nezdružljiva? Ali sta mogoče neodvisna? Odgovor utemelji!

2. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine a. Na stranicah kvadrata BC in CD izberemo na slepo dve točki X in Y, na vsaki stranici po eno. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika ΔAXY manjša od $\frac{1}{3}a^2$?

3. V Preseku so fizikalni in matematični članki. Znano je, da je $\frac{1}{3}$ verjetnost dogodka, da naročnik Preseka bere bodisi matematične bodisi fizikalne članke; pogojna verjetnost, da bere tudi fizikalne članke, če bere matematične, je enaka $\frac{3}{4}$ in pogojna verjetnost, da bere matematične članke, če bere fizikalne članke, je $\frac{1}{2}$. Kolikšna je verjetnost dogodka, da naročnik bere članke iz fizike in matematike?

4. Če sta na stezi dva keglja, igralec podre oba z verjetnostjo $\frac{1}{5}$ in enega z verjetnostjo $\frac{3}{10}$. Kadar stoji na stezi le en kegelj, ga igralec podre z verjetnostjo $\frac{1}{4}$. Na začetku igre sta bila na stezi dva keglja.

   (a) Izračunaj verjetnost, da bo po treh metih na stezi ostal še en kegelj.

   (b) Kolikšna je verjetnost, da je igralec že v prvem poskusu podrl kegelj, če je po treh metih na stezi ostal en kegelj?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Skupina B

Maribor, 3. 12. 2004

1. Vržemo tri poštene igralne kocke. Njihovi meti so med seboj neodvisni. Naj bo A dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva s 6 in B dogodek, da imamo vsaj pri eni kocki tri pike. Izračunaj verjetnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ in $p(A|B)$. Ali sta dogodka A in B nezdružljiva? Ali sta mogoče neodvisna? Odgovor utemelji!

2. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine a. Na stranicah kvadrata AB in AD izberemo na slepo dve točki X in Y, na vsaki stranici po eno. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika ΔXCY večja od $\frac{1}{3}a^2$?

3. Med bralci Preseka je tistih, ki berejo članke iz matematike, prav toliko kot tistih, ki berejo članke iz fizike. Pogojna verjetnost, da bralec bere matematične prispevke, če bere fizikalne prispevke, je dvakrat večja od pogojne verjetnosti, da bere matematične prispevke, če ne bere člankov iz fizike. Matematične ali fizikalne članke bere 75 odstotkov bralcev. Koliko odstotkov bralcev bere fizikalne članke?

4. Če so na stezi trije keglji, igralec podre vse tri z verjetnostjo $\frac{1}{10}$, dva z verjetnostjo $\frac{1}{5}$ in enega z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Kadar stojita na stezi dva keglja, potem oba igralec podre z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ in enega od njiju z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Če je na stezi le en kegelj, ga igralec podre z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Na začetku igre so bili na stezi trije keglji.

   (a) Izračunaj verjetnost, da bo po treh metih na stezi ostal še en kegelj.

   (b) Kolikšna je verjetnost, da je igralec že v prvem poskusu podrl dva keglja, če je po treh metih na stezi ostal en kegelj?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Strokovni študij

2. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 25. 1. 2005

1. Diskretna celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) = \frac{at}{3-t}.$$

   (a) Določi konstanto a, da bo G_X res rodovna funkcija spremenljivke X.
   (b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
   (c) Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X.
   Pomoč: $1 + \check{z} + \check{z}^2 + \cdots = \frac{1}{1-\check{z}}$, če je $|\check{z}| < 1$.

2. Na intervalu $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo števili x in y. Naj bo $X = x - y$ zvezna slučajna spremenljivka.

   (a) Kako je porazdeljena spremenljivka X? Izračunaj najprej njeno porazdelitveno funkcijo in nato gostoto!
   (b) Izračunaj $E(X)$.

3. Iz posode v kateri so 4 rdeče, 3 modre in 3 zelene kroglice, na slepo naenkrat izvlečemo 4 kroglice. Naj bo X število rdečih, Y pa število modrih med njimi.

   (a) Zapiši porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y).
   (b) Zapiši robni porazdelitvi X in Y. Ali sta slučajni spremljivki X in Y neodvisni?
   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$? Kaj meri?

4. Pri kvizu Lepo je biti milijonar je bil preteklo sezono 21-krat pravilen odgovor A, 42-krat odgovor B, 77-krat C in 116-krat odgovor D. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da so odgovori enakomerno porazdeljeni, proti alternativni hipotezi, da niso.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
FERI-Računalništvo in informatika
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 25. 1. 2005

1. Celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y sta neovisni in podani z rodovno oz. porazdelitveno funkcijo:

$$G_X(t) = \frac{a}{3-2t}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & , n < y \leq n+1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

   (a) Določi konstanto a, da bo G_X res rodovna funkcija spremenljivke X. Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$.
   (b) Določi verjetnostni funkciji slučajnih spremneljivk X in Y.
   (c) Izračunaj porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke $Z = |X - Y|$.

2. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{ax}{1+|x|}.$$

   Določi konstanto a, da bo F_X res porazdelitvena funkcija, določi gostoto $p(x)$ in izračunaj verjetnosti $P(X \geq 1)$ in $P(-1 \leq X \leq 2)$.

3. Na intervalu $[0, a]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Njuna vsota naj bo zvezna slučajna spremenljivka X.

   (a) Kako je porazdeljena spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto in porazdelitveno funkcijo!
   (b) Izračunaj $E(X)$.

4. Podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	$10-20$	$20-30$	$30-40$	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25, 10)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 2. 2. 2005

1. Celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y sta neovisni in podani z rodovno oz. porazdelitveno funkcijo:

$$G_X(t) = \frac{a}{3-2t}\ , \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & , \ n < y \leq n+1 \end{cases} \quad , \ n \in \mathbb{N}_0 .$$

   (a) Določi konstanto a, da bo G_X res rodovna funkcija spremenljivke X. Izračunaj tudi $E(X)$ in $D(X)$.

   (b) Določi verjetnostni funkciji slučajnih spremenljivk X in Y in izračunaj porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke $Z = |X - Y|$.

2. Ostri kot romba s stranico a je porazdeljen z gostoto

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2}\varphi & ; \ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & ; \ \varphi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} .$$

   Naj slučajna spremenljivka X meri ploščino romba. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno gostoto!

3. Točka T leži nekje v kvadratu $[0,1] \times [0,1]$, in sicer je verjetnost za to, da pri danih $a, b \in [0,1]$ leži točka v kvadratu $[0,a] \times [0,b]$, enaka

$$\frac{1}{7}ab\left(2a^2 + 3ab + 2b^2\right) .$$

   Kolikšna je verjetnost, da je točka T od izhodišča $(0,0)$ oddaljena manj od 1?

4. Podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	10 − 20	20 − 30	30 − 40	nad 40
5	20	35	25	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathcal{N}(25, 10)$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 12. 5. 2005

1. Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} Cxy^2 & ; 0 \le x, y \le 1, x + y \le 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Določi konstanto C.
   (b) Izračunaj pogojno gostoto $p(y|1/2 \le X \le 1)$.
   (c) Določi pogojno gostoto $p_Y(y|X)$ in izračunaj regresijsko funkcijo $f(x) = E(Y|x)$.

2. Na velikem parkirišču lahko avtomobil parkiramo naprej ali vzvratno. V vzorcu 100 avtomobilov jih je bilo 70 parkiranih naprej. Na stopnji zaupanja 0.95 določi interval zaupanja za verjetnost, da je naključno izbrani avtomobil parkiran naprej.

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe imata karakteristično funkcijo $f(t) = (2 - e^{it})^{-1}$. Določi verjetnostno funkcijo spremenljivke $Z = X + Y$.

4. Carinski inšpektor vsak dan obišče eno od mest Koper, Ljubljana in Maribor. Če je bil v Mariboru ali v Kopru, gre nasledji dan vedno v Ljubljano. Če je bil v Ljubljani, pa je naslednji dan v Mariboru z verjetnostjo $0 < p < 1$ ali v Kopru z verjetnostjo $q = 1 - p$.
   (a) Gibanje inšpektorja predstavi z markovsko verigo (matriko prehodnih vrednosti P) in izračunaj P^n za $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Za posamezni kraj izračunaj verjetnost, da se trgovski potnik po n dnevih prvič vrne v začetni kraj.
   (c) Klasificiraj stanja markovske verige! Ali obstaja stacionarna porazdelitev?

Točke so razporejene po nalogah: $30 + 20 + 20 + 30$.

Univerza v Mariboru
FERI - Telekomunikacije
Univerzitetni študij

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 22. 4. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Mama je odšla s svojimi tremi otroki v trgovino z igračami. Za vsako igračo imajo v trgovini neomejeno zalogo. Otroci so ugotovili, da jim je všeč le 8 različnih vrst igrač, vendar je imela mama denar le za 5 igrač.

   (a) Na koliko načinov lahko mama kupi 5 igrač, ne nujno različnih, če izbira med osmimi vrstami, ki so otrokom všeč? **(10)**

   (b) Mama je kupila 5 različnih igrač. Na koliko načinov lahko teh pet kupljenih igrač doma razdeli med otroke, če mora vsak od njih dobiti vsaj eno? **(15)**

---

2. Prijatelja sta se dogovorila, da se bosta srečala v lokalu Trust med 13. in 14. uro. Vendar sta njuna prihoda na dogovorjeno mesto naključna in neodvisna.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da se bosta prijatelja srečala, če je vsak od njiju pripravljen čakati 15 minut? **(15)**

   (b) Kako dolgo morata biti prijatelja pripravljena čakati, da bo verjetnost srečanja vsaj 0.8? **(10)**

3. Čarovnik iz dežele matematičnih čudes ima rad kocke. V njegovi zbirki so le čudne kocke z n ploskvami, kjer je n neko naravno število. Označimo s K_n kocko z n ploskvami, na katerih so zapisana vsa števila od 1 do n. Ko čarovnik takšno kocko vrže, se z enako verjetnostjo pojavi katerakoli številka.

   (a) Čarovnik izbere kocko K_{60} in jo vrže. Naj bo A dogodek, da je število pik deljivo z 2 in B dogodek, da je število deljivo s 3. Ali sta dogodka A in B neodvisna? (**10**)

   (b) Čarovnik iz množice čudnih kock izbere kocke K_6, K_7, K_8 in jih spravi v žep. Nato iz žepa izvleče kocko, pri čemer je verjetnost potega posamezne kocke sorazmerna s številom ploskev na kocki. Ko vrže to kocko, pade število, ki je deljivo s 4. Določi verjetnost, da je bila izbrana kocka K_8. (**15**)

4. V posodi je 5 belih, 3 rdeče in 2 črni kroglici. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne kroglico rdeče barve. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca; torej, dokler ni bila izvlečena rdeča kroglica.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X! **(10)**

   (b) Izračunaj rodovno funkcijo G_X in določi $E(X)$ ter $D(X)$. **(8)**

   (c) Izračunaj verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi. **(7)**

Točke so razporejene ob nalogah.

Univerza v Mariboru
FERI - Telekomunikacije
Univerzitetni študij

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 10. 6. 2005

Ime in priimek: **Vpisna številka:**

---

1. Andrej in Blažka se zmenita, da se bosta srečala na določenem mestu. Na dogovorjeno mesto prideta ob naključnem času med 20. in 21. uro in neodvisno drug od drugega. Ljubosumni Ciril vse od 20. ure opreza za vogalom in čaka, dokler ne prideta obadva. Slučajna spremenljivka X meri, koliko časa je čakal Ciril.

   (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve! **(15)**

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke X. **(10)**

---

2. V tovarni vsak dan proizvedejo 1600 izdelkov. Za vsakega je verjetnost, da bo imel napako 1/10.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da bo imelo napako natanko 160 izdelkov? Kolikšna pa je verjetnost, da bo imelo napako natanko 175 izdekov (**8**)

   (b) Kolikšna je verjetnost da bo imelo napako več kot 175 izdekov? Kaj pa, da bo izdekov z napako med 150 in 175? (**10**)

   (c) Vse izdelke z napako spravljajo v skladišče, ki se dnevno prazni. Najmanj kako veliko mora biti skladišče, če naj bo verjetnost, da bo premajhno največ 0.05? (**7**)

   Opomba: iskane verjetnosti lahko aproksimirate z normalno porazdelitvijo!

3. Vržemo dve pošteni igralni kocki. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo vsota pik na obeh kockah in vrednost slučajne spremenljivke Y je absolutna razlika števila pik na obeh kockah.

   (a) Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor (X, Y)? Zapiši njegovo verjetnostno tabelo! **(15)**

   (b) Določi robni porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y. **(5)**

   (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = X + Y$. **(5)**

4. (a) Naenkrat vržemo tri poštene igralne kovance. Število padlih grbov je vrednost slučajne spremenljivke X. Zapiši in poimenuj njeno porazdelitev! **(10)**

   (b) V igralnici se pri igri na srečo istočasno mečejo trije kovanci, ki so po zagotovilu igralnice pošteni. Število grbov x_j in njihova frekvenca m_j pri 80-tih metih je podana v tabeli:

x_j	0	1	2	3
m_j	6	21	38	15

.

   Ali lahko na osnovi teh podatkov s 5% tveganjem zavrnemo hipotezo o poštenosti igralnih kovancev? **(15)**

Točke so razporejene ob nalogah.