

# 1. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

## Skupina A

Maribor, 24. 11. 2005

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. Imamo osem ploščic, ki so oštevilčene s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

- (a) Vseh osem ploščic naključno razporedimo v raven niz. Kolikšna je verjetnost,
- (i) da pri tem vse sode cifre stojijo skupaj? **(6)**
  - (ii) da se sestavljeni niz začne in konča z liho cifro? **(6)**
- (b) Iz danih ploščic naenkrat izberemo štiri ploščice. Kolikšna je verjetnost,
- (i) da so vsa izbrana števila večja od 2? **(6)**
  - (ii) da sta dve števili sodi in dve lihi? **(7)**
-

---

2. Z intervala  $[-4, 4]$  naključno in neodvisno izberemo števili  $x$  in  $y$ . Označimo dogodka:

$A$ - obe števili sta od 0 oddaljeni vsaj za 1,

$B$ - vsota absolutnih vrednosti števil  $x$  in  $y$  ne presega 4.

Izračunaj verjetnosti:  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(AB)$ ,  $P(A \cup B)$  in  $P(A|B)$ . (25)

---

---

3 Strelca neodvisno en od drugega streljata na tarčo, ki jo prvi zadene z verjetnostjo  $\frac{2}{3}$ , drugi pa z verjetnostjo  $\frac{3}{4}$ . Vsak po dvakrat ustrelita proti cilju.

(a) Izračunaj verjetnost dogodka, da sta bila v tarči 2 zadetka. **(10)**

(b) Izračunaj pogojno verjetnost dogodka, da sta oba zadela tarčo, če sta bila v tarči 2 zadetka. **(15)**

---

---

4. V prvi posodi so tri bele in dve rdeči kroglici, v drugi so tri bele in dve rdeči ter v tretji ena bela in dve rdeči kroglici. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali rdečo kroglico? **(15)**
- (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili istobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili rdečo kroglico? **(10)**
- 

Točke so razporejene ob nalogah.

# 1. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

## Skupina B

Maribor, 24. 11. 2005

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. Imamo sedem ploščic, ki so oštevilčene s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- (a) Vseh sedem ploščic naključno razporedimo v raven niz. Kolikšna je verjetnost,
- (i) da pri tem vse lihe cifre stojijo skupaj? **(6)**
  - (ii) da se sestavljeni niz začne in konča s sodo cifro? **(6)**
- (b) Iz danih ploščic naenkrat izberemo tri ploščice. Kolikšna je verjetnost,
- (i) da so vsa izbrana števila manjša od 5? **(6)**
  - (ii) da sta dve števili sodi in eno liho? **(7)**
-

---

2. Z intervala  $[-2, 2]$  naključno in neodvisno izberemo števili  $x$  in  $y$ . Označimo dogodka:

$A$ - vsaj eno število  $x$  ali  $y$  je od 0 oddaljeno več kot 1,

$B$ - vsota absolutnih vrednosti števil  $x$  in  $y$  ne presega 2.

Izračunaj verjetnosti:  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(AB)$ ,  $P(A \cup B)$  in  $P(A|B)$ . (25)

---

---

3 Strelca neodvisno en od drugega streljata na tarčo, ki jo prvi zadene z verjetnostjo  $\frac{1}{3}$ , drugi pa z verjetnostjo  $\frac{1}{2}$ . Vsak po dvakrat ustrelita proti cilju.

(a) Izračunaj verjetnost dogodka, da so bili v tarči 3 zadetki. **(10)**

(b) Izračunaj pogojno verjetnost dogodka, da je tarčo zgrešil prvi strelec, če so bili v tarči 3 zadetki. **(15)**

---

---

4. V prvi posodi so tri bele in dve rdeči kroglici, v drugi so tri bele in dve rdeči ter v tretji ena bela in dve rdeči kroglici. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali belo kroglico? **(15)**
- (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili raznobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili belo kroglico? **(10)**
- 

Točke so razporejene ob nalogah.



# 1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

## Skupina A

Maribor, 24. 11. 2005

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. V prvi posodi so tri bele in dve rdeči kroglici, v drugi so tri bele in dve rdeči ter v tretji ena bela in dve rdeči kroglici. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali rdečo kroglico? **(15)**

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili istobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili rdečo kroglico? **(10)**

---

- 
2. Nad daljico  $AB$  dolžine  $2l$  z razpoloviščem  $S$  narišemo polkrožnico s središčem  $S$ . Na polkrožnici naključno izberemo točko  $C$ . Pri tem nastane trikotnik  $\triangle ABC$ . Kolikšna je verjetnost, da je ploščina  $\triangle ABC$  manjša od  $1/2$  največje možne ploščine tako nastalih trikotnikov? (25)
-

---

3 Tristan in Izolda izmenično mečeta pošten kovanec. Če Tristan vrže grb, dobi jabolko, sicer ne dobi ničesar. Izolda za vržen grb dobi dve jabolki in za cifro izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi dve jabolki več od drugega. Na začetku imata oba enako število jabolk. Kolikšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in ni imel nobene prednosti? (25)

---

---

4. Imamo sedem ploščic, ki so oštevilčene s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Iz danih ploščic naenkrat izberemo tri ploščice. Vrednost slučajne spremenljivke  $X$  je število ploščic, na katerih je soda cifra. Vrednost slučajne spremenljivke  $Y$  pa naj bo največje število, ki je na izbranih ploščicah.

(a) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. **(13)**

(b) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $Y$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. **(12)**

---

# 1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

## Skupina B

Maribor, 24. 11. 2005

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. V prvi posodi so tri bele in dve rdeči kroglici, v drugi so tri bele in dve rdeči ter v tretji ena bela in dve rdeči kroglici. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali belo kroglico? **(15)**

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili raznobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili belo kroglico? **(10)**

---

- 
2. Nad daljico  $AB$  dolžine  $2l$  z razpoloviščem  $S$  narišemo polkrožnico s središčem  $S$ . Na polkrožnici naključno izberemo točko  $C$ . Pri tem nastane trikotnik  $\triangle ABC$ . Kolikšna je verjetnost, da je ploščina  $\triangle ABC$  večja od  $1/2$  največje možne ploščine tako nastalih trikotnikov? (25)
-

---

3 Tristan in Izolda izmenično mečeta pošten kovanec. Če Tristan vrže grb, dobi jabolko, sicer ne dobi ničesar. Izolda za vržen grb dobi dve jabolki in za cifro izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi dve jabolki več od drugega. Na začetku ima Tristan eno jabolko več od Izolde. Kolikšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel? (25)

---

---

4. Imamo osem ploščic, ki so oštevilčene s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Iz danih ploščic naenkrat izberemo tri ploščice. Vrednost slučajne spremenljivke  $X$  je število ploščic, na katerih je liha cifra. Vrednost slučajne spremenljivke  $Y$  pa naj bo najmanjše število, ki je na izbranih ploščicah.

(a) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. **(13)**

(b) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $Y$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. **(12)**

---

Točke so razporejene ob nalogah.



# 1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 24. 4. 2006

**Ime in priimek:**

**Vpisna številka:**

---

1. Na koliko načinov lahko:

- (a) 5 rdečih, 3 modre in 4 zelene kroglice zložimo v vrsto tako, da modre kroglice stojijo skupaj; (5)
  - (b) 5 bankovcev po 1000 SIT in 3 bankovce po 500 SIT razdelim med dva človeka; (5)
  - (c) izmed 20-tih kart za šnops izberem 4 karte, tako da dobim dva asa; (5)
  - (d) izmed štirimestnih števil izberem liho število s samimi različnimi števki? (5)
-

- 
2. Na daljici  $AB$  leži točka  $C$ , ki deli daljico v razmerju  $AC : CB = 2 : 1$ . Na odseku  $AC$  naključno izberemo točko  $D$  in na odseku  $CB$  naključno izberemo točko  $E$ . Izračunaj, kolikšna je verjetnost dogodka, da lahko z daljicami  $AD$ ,  $DE$  in  $EB$  sestavimo trikotnik. (25)
-

---

3. V prvi posodi so tri bele in dve rdeči kroglici, v drugi so tri bele in dve rdeči ter v tretji ena bela in dve rdeči kroglici. Naključno prenesemo dve kroglici iz prve v drugo posodo, nato pa eno kroglico iz druge v tretjo posodo, nazadnje iz tretje posode naključno izberemo kroglico.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da smo na koncu izbrali belo kroglico? **(15)**
- (b) Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili raznobarvni kroglici, če smo iz tretje posode potegnili belo kroglico? **(10)**
-

---

4. Imamo devet ploščic, ki so oštevilčene s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Iz danih ploščic naenkrat izberemo štiri ploščice. Vrednost slučajne spremenljivke  $X$  je število ploščic, na katerih je liha cifra. Vrednost slučajne spremenljivke  $Y$  naj bo največje število, ki je na izbranih ploščicah.

(a) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. (15)

(b) Ugotovi, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $Y$ . Določi njeno verjetnostno funkcijo in izračunaj matematično upanje. (15)

---

Točke so razporejene ob nalogah.

## 2. KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 1. 2006

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. Igralni kovanec vržemo 5 krat zaporedoma. Vrednost slučajne spremenljivke  $X$  je število grbov, ki je pri tem padlo.

- (a) Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke  $X$ , če smo metali pošten kovanec. Izračunaj tudi matematično upanje  $E(X)$  in disperzijo  $D(X)$ ! **(15)**
- (b) V spodnji tabeli so rezultati po 320-tih ponovitvah omenjenega poskusa, kjer je  $x_j$  število realizacij, v katerih se je pojavilo  $m_j$  grbov.

$m_j$	0	1	2	3	4	5
$x_j$	7	41	98	114	54	6

Ali lahko na stopnji značilnosti  $\alpha = 0.05$  zavrneemo hipotezo, da smo metali pošten igralni kovanec? Pomoč: uporabi  $\chi^2$ -test! **(10)**

---

---

2. Življenska doba avtomobilskega akumulatorja v urah  $X$  je podana z gostoto

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

- (a) Skiciraj gostoto porazdelitve za koeficient  $\lambda = 1$ . (5)
- (b) Izračunaj povprečno življensko dobo akumulatorja  $T = E(X)$ , če je koeficient  $\lambda = 10000 h$ . (15)
- (c) Kolikšna je verjetnost, da bo akumulator dočakal dvakratno povprečno življensko dobo  $2T$ ? (5)
-

---

3 Vržemo dve pošteni igralni kocki, modro in rdečo. Število padlih pik na modri kocki je vrednost slučajne spremenljivke  $X$  in vsota padlih pik na obeh kockah naj bo vrednost  $Y$ . Zapiši porazdelitev slučajnega vektorja  $(X, Y)$  ter določi še robni porazdelitvi  $X$  in  $Y$ . (20)

---

- 
4. Predpostavimo, da so mesečni prihodki zaposlenih v javni upravi porazdeljeni normalno  $N(a, \sigma)$ . Pri 20. anketirancih, ki so zaposleni v javni upravi, smo dobili naslednje podatke o višini mesečne neto plače v 10.000 SIT:

29, 14, 22, 28, 36, 47, 20, 23, 26, 24, 46, 53, 55, 36, 28, 25, 44, 27, 15, 19.

- (a) Vzorčne prihodke uredi v ranžirno vrsto po naraščajoči vrednosti. Izračunaj vse tri vzorčne kvartile  $q_1$ ,  $q_2$  in  $q_3$  ter določi interval, v katerem leži osrednjih 50% vzorčnih vrednosti. **(8)**
- (b) Izračunaj vzorčni modus, vzorčno povprečje in vzorčni standardni odklon. **(8)**
- (c) Na osnovi danega vzorca določi 95% interval zaupanja za povprečni mesečni dohodek zaposlenega v javni upravi. **(8)**
- (d) Ali lahko na stopnji tveganja  $\alpha = 0.05$  zavrnemo hipotezo, da je povprečni prihodek zaposlenega v javni upravi 250.000 SIT? **(6)**
- 

Točke so razporejene ob nalogah.



## 2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

Maribor, 23. 1. 2006

Ime in priimek:

Vpisna številka:

---

1. V posodi imamo  $m$  belih in  $n$  rdečih kroglic. Naključno izberemo kroglico in jo vrnemo. Slučajna spremenljivka  $X$  meri število izbir, ki so potrebne, da je bela kroglica izbrana drugič.

(a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ ? Zapiši njeno verjetnostno funkcijo! (10)

(b) Izračunaj rodovno funkcijo  $G_X(t)$  in matematično upanje  $E(X)$ . (15)

---

- 
2. Enakokrak trikotnik  $ABC$  je določen s podatkom  $AC = BC = a$  in vmesnim kotom  $\gamma$ , ki je porazdeljen z gostoto

$$p(\gamma) = \begin{cases} k\gamma & ; \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & ; \gamma \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} .$$

Slučajna spremenljivka  $X$  meri ploščino danega trikotnika.

(a) Določi konstanto  $k$  tako, da bo  $p(\gamma)$  res gostota. (10)

(b) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ ? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! (15)

Pomoč: ploščina trikotnika podanega s stranicama  $a$  in  $b$  ter vmesnim kotom  $\delta$  je  $S = \frac{1}{2}ab \sin \delta$ .

---

---

3 Vržemo dve pošteni igralni kocki. Vrednost slučajne spremenljivke  $X$  naj bo vsota pik na obeh kockah in vrednost slučajne spremenljivke  $Y$  je absolutna razlika števila pik na obeh kockah.

- (a) Ugotovi, kako je porazdeljen slučajni vektor  $(X, Y)$ ? Zapiši njegovo verjetnostno tabelo! (15)
  - (b) Določi robni porazdelitvi slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ . (5)
  - (c) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $Z = X + Y$ ? (5)
-

- 
4. Predpostavimo, da je teža novorojenčkov  $X$  pri materah, ki so v nosečnosti kadile na populaciji porazdeljena normalno  $N(a, \sigma)$  in da je tudi teža novorojenčkov  $Y$  pri materah, ki v nosečnosti niso kadile porazdeljena normalno  $N(b, \tau)$ . Porodnišnica  $X$  nam je posredovala naslednji vzorec teže novorojenčkov v gramih:

$X$  : 2643, 2906, 3444, 2211, 2940, 2594, 2495, 2992, 1709, 2466, 3303;

$Y$  : 3860, 2733, 3203, 3487, 3100, 3827, 3062, 1729, 2877, 2977, 4054, 3699, 3799, 2551.

- (a) Na podlagi danih podatkov izračunaj vzorčni povprečji  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  in vzorčna standardna odklona  $S_X$ ,  $S_Y$ . (5)
- (b) Na stopnji značilnosti  $\alpha = 0.1$  opravi preizkus značilnosti za ničelno hipotezo, da sta standardna odklona obeh porazdelitev enaka, t.j.  $H_0(\sigma = \tau)$ . (10)
- (c) Ali lahko na osnovi danega vzorca s 5% tveganjem zavrnamo ničelno hipotezo  $H_0(a = b)$ , da sta povprečni teži novorojenčkov pri materah, ki so oz. v nosečnosti niso kadile, na populaciji enaki. (10)
- 

Točke so razporejene ob nalogah.

## 2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 6. 2. 2006

1. Kovanec, katerega verjetnost, da pade grb, je  $p \in (0, 1)$ , mečemo tako dolgo, dokler ne dobimo dva grba zaporedoma. Število metov, ki so za to potrebni je vrednost slučajne spremenljivke  $X$ . Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke  $X$  in izračunaj njeno rodovno funkcijo. Koliko metov bo potrebno v povprečju opraviti?
2. V kvadratu  $ABCD$  z osnovno stranico dolžine  $a$  naključno izberemo točko  $T$ . Ploščina četverkotnika  $ABTD$  je vrednost slučajne spremenljivke  $X$ . Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$ ? Zapiši njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto! Izračunaj tudi matematično upanje slučajne spremenljivke  $X$ .
2. Slučajni vektor  $(X, Y)$  je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(x^2 - y^2)^2} & ; |y| < x - 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Določi porazdelitev slučajnega vektorja  $(U, V)$ , kjer je  $U = X + Y$  in  $V = X - Y$ . Ali sta slučajni spremenljivki  $U$  in  $V$  neodvisni?

4. Predpostavimo, da je teža novorojenčkov  $X$  pri materah, ki so v nosečnosti kadile na populaciji porazdeljena normalno  $N(a, \sigma)$  in da je tudi teža novorojenčkov  $Y$  pri materah, ki v nosečnosti niso kadile porazdeljena normalno  $N(b, \tau)$ . Porodnišnica  $X$  nam je posredovala naslednji vzorec teže novorojenčkov v gramih:

$X$  : 2643, 2906, 3444, 2211, 2940, 2594, 2495, 2992, 1709, 2466, 3303;

$Y$  : 3860, 2733, 3203, 3487, 3100, 3827, 3062, 1729, 2877, 2977, 4054, 3699, 3799, 2551.

- (a) Na stopnji značilnosti  $\alpha = 0.1$  opravi preizkus značilnosti za ničelno hipotezo, da sta standardna odklona obeh porazdelitev enaka, t.j.  $H_0(\sigma = \tau)$ .
- (b) Ali lahko na osnovi danega vzorca s 5% tveganjem zavrnemo ničelno hipotezo  $H_0(a = b)$ , da sta povprečni teži novorojenčkov pri materah, ki so oz. v nosečnosti niso kadile, na populaciji enaki.

Naloge so enakovredne.

### 3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

Maribor, 10. 5. 2006

1. Slučajni vektor  $(X, Y)$  je porazdeljen na območju  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$  z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke  $(x, y)$  od izhodišča.

(a) Zapiši gostoto verjetnosti slučajnega vektorja  $(X, Y)$ .

(b) Izračunaj gostoto porazdelitve pogojne slučajne spremenljivke  $Y|X$  in izračunaj regresijo  $E(Y|X)$ .

2. Na vzorcu velikosti  $n = 160$  podjetnikov v majhnih podjetjih v Sloveniji, so ugotovili, da je vzorčna povprečna starost anketiranih podjetnikov  $\bar{X} = 39.5$  let in vrednost cenilke za vzorčni standardni odklon znaša  $S = 9.8$  let.

(a) Pri stopnji zaupanja  $\alpha = 0.95$  določi interval zaupanja za povprečno starost podjetnikov v majhnih podjetjih v Sloveniji.

(b) V Sloveniji je v majhnih podjetjih 25% podjetnic. Vsaj kolikšna naj bo velikost vzorca, da bo ob 5% tveganju vzorčni delež podjetnic ležal v območju  $25\% \pm 2\%$ ?

3. Slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  sta neodvisni in imata gostoti

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+(x+a)^2)} \quad \text{in} \quad p_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+(x+b)^2)}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Določi karakteristično funkcijo in gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke

$$Z = \frac{1}{3}(X + 2Y).$$

4. Delec se giblje po mreži trikotnika  $\triangle ABC$ . Iz oglišča  $A$  se delec vedno premakne v oglišče  $B$ . Če je delec v oglišču  $B$ , potem z verjetnostjo  $p$  ostane v oglišču  $B$  ali pa se premakne v oglišče  $C$ . Če je delec v oglišču  $C$ , potem je enako verjetno, da v  $C$  tudi ostane ali pa se premakne v  $A$ . Gibanje delca opiši s homogeno markovsko verigo in za vsako oglišče trikotnika izračunaj povprečen čas vrnitve delca.