Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 4. 2. 2004

1. V tetraedru $ABCD$ naj točka E razdeli stranico AC v razmerju $AE : EC = 2 : 1$, točka F stranico AD v razmerju $AF : FD = 1 : 1$ in točka G stranico BC v razmerju $BG : GC = 4 : 1$. Točke E, F in G določajo ravnino, ki seka stranico BD v točki T. V kakšnem razmerju točka T deli stranico BD?

2. Dani sta matriki $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ in $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Naj bo $A = 2XX^T + Y^TY$ in $B = XY + (XY)^T$.

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n.

   (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko B. Dokaži, da te matrike tvorijo vektorski podprostor z bazo

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Reši matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p'(1) & p(-1) \\ p(1) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

   (a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in zapiši matriko, ki pripada tej preslikavi v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Določi podprostora $\operatorname{im} \mathcal{A}$ in $\ker \mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 30 + 20 + 25$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 18. 2. 2004

1. Skozi točko $T(0,-1,1)$ položi premico r, ki seka premici $p: \frac{x+3}{2} = 2-y = z$ in $q: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = z-1$.

2. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(A+X) = \det A + \det X\}.$$
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Določi bazo in razsežnost podprostora V.
   (c) Dokaži, da se da vsaka matrika $Y \in M_2(\mathbb{R})$ zapisati v obliki $Y = \alpha E_{11} + X$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$ in X neka matrika iz V.

3. Za realni števili a in b tvorimo matriko
$$A = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$
   Preslikava $\mathcal{T}: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.
   (b) Poišči matriko, ki preslikavi $\mathcal{T}$ pripada v standardni bazi prostora matrik.
   (c) Obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave $\mathcal{T}$ v odvisnosti od prametrav a in b.

4. Linearni preslikavi $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada matrika
$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -2 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave $\mathcal{A}$.
   (b) Ali obstaja kaka baza prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

Točke so razporejene po nalogah: $20 + 25 + 30 + 25$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 16. 6. 2004

1. Dana je tristrana piramida $ABCD$. Naj bo točka T težišče trikotnika BCD. Točka E naj bo razpolovišče daljice AB, točka F deli daljico AC v razmerju $AF : FC = 1 : 3$ in točka G deli daljico AD v razmerju $AG : GD = 1 : 2$. Daljica AT prebode trikotnik EFG v točki S. Določi razmerje $AS : ST$.

2. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.
   (b) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

3. Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[X]$ je podan s predpisom: $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1+x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x + x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2 + x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$ in $\mathcal{A}(x^3 + x^4) = -2x^3 + 2x^4$. Poišči matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_4[X]$ in določi tudi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

4. V $\mathbb{R}^3$ vpeljemo skalarni produkt tako, da je množica $\{(1,0,0), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$ ortonormirana baza. Poišči kot med vektorjema $u_1 = (0,-1,0)$ in $u_2 = (0,0,1)$ in pravokotno projekcijo vektorja u_1 na podprostor, ki ga generirata vektorja $u_3 = (1,0,1)$ in $u_4 = (0,1,1)$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 30. 6. 2004

1. Dana je ravnina $\pi : x + 2y - z = 0$ in točki $P\,(2, -1, 2)$, $Q\,(0, 3, 0)$. Poišči množico točk v ravnini π, ki so od P in Q enako oddaljene. Zapiši njeno enačbo!

2. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z - w &= 1 \\ x + 5y + z - 2w &= 2 \\ 3x + 5y + 8z + 3w &= -3 \\ 2x + 2y + bz + 5w &= a \end{aligned}$$

   Obravnavaj njegovo rešljivost v odvisnosti od parametrov a in b ter poišči rešitev v posebnem primeru, ko je $a = -1$ in $b = 7$.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2\,[X] \to \mathbb{R}_2\,[X]$ je odvajanje na prostoru polinomov stopnje največ 2, t.p. $\mathcal{A}p = p'$. Linearni preslikavi $\mathcal{B} : \mathbb{R}_2\,[X] \to \mathbb{R}_2\,[X]$ pa v bazi $\{1, x + x^2, x - x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2\,[X]$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2\,[X]$ pripada preslikavi $\mathcal{AB}$.

   (b) Kateri polinomi ležijo v jedru preslikave $\mathcal{AB}$ in kateri ležijo v sliki preslikave $\mathcal{AB}$?

4. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 25. 8. 2004

1. Naj bosta $p : x = y = z$ in $q : 2x = 3y = 6z$ premici v prostoru $\mathbb{R}^3$ ter Σ ravnina, ki vsebuje premici p in q. Naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje čez premico p in $\mathcal{B}$ zrcaljenje čez ravnino Σ.
   (a) Zapiši normalno enačbo ravnine Σ in parametrično enačbo premice $\mathcal{A}(q)$.
   (b) Določi množico točk $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ za katere velja $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{B}\vec{x}$. Zapiši njeno enačbo!

2. Za katero število $a \in \mathbb{R}$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & a-3 & 2a-1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
ni obrnljiva? Za to število a reši matrično enačbo $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^4$. Kaj je rešitev te matrične enačbe za poljubno drugo število $a \in \mathbb{R}$?

3. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A^T X = -XA^T\}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Preveri, da sta U in V vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in določi njuni bazi.
   (b) Dokaži $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

4. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 - a_1 + 2a_2)1 + (a_0 + a_2)\,x + (-a_0 + 2a_1 - 2a_2)\,x^2.$$
   (a) Določi matriko A, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Zapiši karakteristični in minimalni polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A. Ali obstaja diagonalna matrika podobna matriki A? Če obstaja, jo tudi zapiši.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 8. 9. 2004

1. Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C', D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C, D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

2. V vektorskem prostoru $M_3(\mathbb{R})$ je dana podmnožica $U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, XA = AX^T\}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_3(\mathbb{R})$ in poišči njegovo razsežnost in kakšno bazo.

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči tako diagonalno matriko D in matriko prehoda P, da bo veljalo $D = P^{-1}AP$. Nato za vsak $n \in \mathbb{N}$ poišči matriko A^n.

4. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je podana s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = xp'(x) - p(x).$$
Pokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava, določi matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi ter določi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Naloge so enakovredne.