Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 13. 11. 2001

1. Dan je enakokrak trapez $ABCD$ s krakoma $BC = AD$. Osnovnica AB je dvakrat daljša od osnovnice CD. Točka E leži na razpolovišču kraka AD. V kakšnem razmerju deli diagonalo AC daljica BE in obratno?

2. Podana je premica $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{2} = -z$ in točka $T\,(1, 2, 3)$.

   (a) Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje premico p in točko T.

   (b) Zapiši enačbo ravnine, ki je pravokotna na premico p in vsebuje točko T.

   (c) Izračunaj oddaljenost točke T od premice in točko T prezrcali čez premico p.

3. Paralelepiped $ABCDEFGH$ določa točka $A\,(1, 0, 0)$ in vektorji $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (2, -1, 0)$ ter $\overrightarrow{AE} = (0, 2, 1)$.

   (a) Določi koordinate oglišč paralelepipeda.

   (b) Izračunaj volumen paralelepipeda in ploščino trikotnika ΔBGE.

   (c) Določi enačbo ravnine, ki gre skozi točko G in seka stranski ploskvi $ABFE$ in $BCGF$ pod pravim kotom.

4. Glede na realno število a obravnavaj rešljivost sistema:

$$\begin{aligned}
(1-a)\,z + \big(a^2 - a\big)\,u &= a - 1\,,\\
ax - 2y + (1+a)\,z + u &= a^2 - a\,,\\
y - z - u &= 0\,,\\
-ax + 2y - z - u &= 0\,.
\end{aligned}$$

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 18. 12. 2001

1. Reši matrično enačbo $B^T X A = A^T$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$
Izračunaj tudi $\det X$ in $\operatorname{rank} X$.

2. Realno matriko dimenzije $n \times n$ imenujemo ortogonalna matrika, če velja $AA^T = A^T A = I$.
   (a) Pokaži, da je
   $$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$
   ortogonalna matrika dimenzije 2×2.
   (b) Dokaži, da je produkt ortogonalnih matrik spet ortogonalna matrika.
   (c) Izračunaj determinanto ortogonalne matrike.

3. Izračunaj determinanto naslednje matrike:
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ realnih $n \times n$ matrik sta dani podmnožici $U = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A - A^T \text{ je diagonalna}\right\}$ in $V = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A + A^T \text{ je diagonalna}\right\}$.
   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora prostora $M_n(\mathbb{R})$. Kateri od teh podprostorov vsebuje vse simetrične in kateri vse poševno simetrične matrike?
   (b) V primeru, ko je $n = 3$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostorov U in V. Določi vektorska podprostora $U \cap V$ in $U + V$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 23. 1. 2002

1. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje prostora $\mathbb{R}^3$ čez ravnino $y = 0$, $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $z = 0$ in naj bo $\mathcal{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zasuk prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi x za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivnem smislu.
   (a) Kakšne matrike pripadajo linearnim preslikavam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ v standardni bazi vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) Določi jedro in sliko linearne preslikave $\mathcal{CB}$. Kaj geometrijsko predstavljata jedro in slika?
   (c) Zapiši matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{AC}$ v urejeni bazi $\Sigma = \{(1,1,0)\,, (0,1,0)\,, (2,4,3)\}$.

2. Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$, za
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.
   (b) Poišči matriko, ki preslikavi $\mathcal{T}$ pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.
   (c) Določi tudi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$.

3. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$
podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.
   (a) Do podobnosti natančno določi vse matrike, za katere je $p(\lambda) = (\lambda - 1)^4 (\lambda + 1)^2$ karakteristični polinom in $q(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$ minimalni polinom.
   (b) Naj za matriko A velja $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 + A - \frac{1}{2}I$. Kaj lahko poveš o lastnih vrednostih matrike A? Ali se matrika A da diagonalizirati? Odgovor utemelji!

Točke so po nalogah razporejene takole: $30 + 25 + 25 + 20$.