Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 15. 12. 2003

1. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$ in $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Pri tem točka E deli stranico BC v razmerju $BE : EC = 2 : 1$ in točka F deli stranico DC v razmerju $DF : FC = 1 : 2$. Naj bo T presečišče daljic AE in BF. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$! V kakšnem razmerju seka daljica AE daljico BF?

2. Dan je tetraeder (pravilna tristrana piramida) s prostornino V. Težišča stranskih ploskev naj bodo oglišča novega tetraedra. Kolikšna je njegova prostornina? Prostornino izrazi z V!

3. Dana je ravnina $\pi : x - 4y + 2z = 7$ in premica p, ki je presek ravnin $x - 2y - 4z = -3$ in $2x + y - 3z = -1$.
   (a) Zapiši enačbo premice p in izračunaj presečišče premice p z ravnino π.
   (b) Zapiši enačbo premice q, ki leži v ravnini π, je pravokotna na premico p in poteka skozi točko, kjer p prebode ravnino π.

4. Dani so vektorji $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ in $\vec{c} = (0, 3, -4)$. Kakšnemu pogoju morajo zadoščati števila r, s, t, da bomo vektor $\vec{d} = (r, s, t)$ lahko izrazili kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$? Ali so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni?

5. Glede na različne vrednosti realnih parametrov a in b poišči rešitve naslednjega sistema enačb:
$$\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & v & = & b \\ x & + & ay & + & z & + & v & = & 0 \\ x & + & y & + & az & + & v & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & av & = & 0 \end{array}.$$

Opomba. Pri prvih treh nalogah je obvezna skica!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-dvopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 31. 3. 2004

1. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Določi matriko X, da bo $AXC^T = 4AB^T + 2\left(CX^T\right)^T$. Koliko je rang matrike X?

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & -a \\ a & x & -a & -a \\ x & -a & -a & -a \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj $\det(A+B)$ in $\det(AB)$.

3. V $\mathbb{R}^5$ sta dana vektorska podprostora $U = \mathcal{L}\{(0,-1,1,-1,0),(1,0,0,0,1)\}$ in $V = \{x \in \mathbb{R}^5 | \, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \; x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$. Poišči primere baz vektorskih podprostorov $V, U \cap V$ in $U + V$.

4. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \, | XA = AX\}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \, | XA = -AX\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora prostora $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostorov U in V.

   (c) Določi podprostor $U \cap V$ in zapiši njegovo bazo.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 24. 5. 2004

1. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)\,1 + (2x_1 + x_2 - x_4)X + (4x_1 + 2x_2 - 2x_4)\,X^2.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi matriko A, ki pripada tej linearni preslikavi glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči poljubno bazo Σ jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Koliko je $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ in $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$?
   (c) Dopolni Σ do urejene baze Σ' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}_2[X]$. Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Σ' in Π'?

2. Bodi $\mathcal{A}$ linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^3$, ki preslika vektorje e_1, e_2, e_3 urejene baze Σ v vektorje e_2, e_3, e_1 v tem vrstnem redu. V $\mathbb{R}^3$ imamo tudi urejeno bazo $\Pi = \{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$. Zapiši matriko, ki je prirejena transformaciji $\mathcal{A}^{2004}$ v urejeni bazi Π.

3. Linearni transformaciji $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada matrika
$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -2 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje transformacije $\mathcal{A}$ ter opiši njeno geometrijsko delovanje.
   (b) Ali obstaja kaka baza prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

4. Naj bo $M_2(\mathbb{R})$ vektorski prostor realnih 2×2 matrik.
   (a) Dokaži, da je s predpisom $\langle A|B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},\ A, B \in M_2(\mathbb{R})$, definiran skalarni produkt na $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Poišči ortonormirano bazo podprostora
$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+2b \\ 0 & -b \end{bmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$

Točke so razporejene po nalogah: $30 + 20 + 25 + 25$.