Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 17. 12. 2004

1. Dokaži, da za poljubna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja neenakost
$$|\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{a}-\vec{b}| \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$
Razišči tudi, kdaj v zgornjem primeru velja enakost.

2. Dana je kocka $ABCDEFGH$ z osnovno stranico dolžine a. Naj telesna diagonala AG prebada trikotnik ΔCHF v točki T.
   (a) Z uporabo vektorskega in mešanega produkta izračunaj ploščino trikotnika ΔCHF in prostornino piramide $CHFA$.
   (b) Pod kakšnim kotom seka diagonala AG ravnino, ki jo določa trikotnik ΔCHF?
   (c) Izračunaj razmerje $AT : TG$ in vektor $\overrightarrow{AT}$ izrazi z vektorji $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ in $\overrightarrow{AH}$. Kaj ugotoviš?

3. Dana je ravnina $\pi : 2x + y - z = 0$ in točki $A\,(-1,2,2)$, $B\,(3,0,0)$. Naj bo M množica točk v ravnini π, ki so enako oddaljene od točk A in B.
   (a) Določi množico M. Zapiši njeno enačbo!
   (b) Poišči vse tiste točke $T \in M$, za katere velja, da je trikotnik ΔATB pravokoten.

4. Glede na realno število a obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{aligned}
(1-a)\,y + \left(a^2 - a\right) u &= a - 1\,,\\
ax + (1+a)\,y - 2z + u &= a^2 - a\,,\\
y - z + u &= 0\,,\\
-ax - y + 2z - u &= 0\,.
\end{aligned}$$

Opomba. Pri prvih treh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $20 + 30 + 25 + 25$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-dvopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 8. 4. 2005

1. Dana je matrika
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \,. \tag{1}$$
Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n, če je $A = 2I + J$.

2. Poišči vse matrike $B \in M_3(\mathbb{R})$, ki komutirajo z matriko J, definirano v (1). Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko B enolično zapisati v obliki $B = \alpha I + \beta J + \gamma J^2$, kjer so α, β in γ ustrezna realna števila.

3. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in
$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -b \\ 1 & a & -b & 1 \\ 1 & -b & a & 1 \\ -b & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$
Izračunaj determinanto matrike $A_{a,b}$ in določi vse pare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pri katerih matrika $A_{a,b}$ ni obrnljiva.

4. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici
$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A - A^T \text{ je diagonalna matrika} \right\} \quad \text{in}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 3. 6. 2005

1. Naj bo $\vec{a}$ neničelni vektor v $\mathbb{R}^3$ in $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, podana s predpisom

$$\mathcal{A} : \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x} + \vec{x} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dokaži, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna.
   (b) Določi jedro $\ker \mathcal{A}$ in sliko $\operatorname{im} \mathcal{A}$.
   (c) Ali je preslikava $\mathcal{A}$ injektivna? Ali je surjektivna? Ali obstaja inverzna preslikava $\mathcal{A}^{-1}$?

2. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je endomorfizem $\mathcal{A}$ podan s predpisom

$$\mathcal{A}\left(a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2\right) = (2a_0 + a_1)\,1 + (a_0 + a_1 + 2a_2)\,x + (-a_1 + a_2)\,x^2.$$

   Endomorfizmu $\mathcal{B}$ pa v bazi $\{1+x+x^2, 1+x^2, 1-x\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$ pripada matrika

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Katera matrika pripada endomorfizmu $\mathcal{AB}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$?

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 - x_3, 2x_2, -x_1 + x_3).$$

   Določi lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore preslikave $\mathcal{A}$ ter opiši njeno geometrijsko delovanje. Ali obstaja kaka baza prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

4. Določi karakteristični polinom, minimalni polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje realne matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ali je matrika A podobna diagonalni matriki? Če je, kateri?

Naloge so enakovredne.