

## Vaje 2: Skalarni, vektorski in mešani produkt

Naloge na vajah:

1. Izračunaj dolžino vektorjev  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  in  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , njun skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  in kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .
2. Izračunaj projekcijo vektorja  $\vec{b} = (-3, 4, 0)$  na vektor  $\vec{a} = (2, -1, -2)$
3. Dokaži, da je paralelogram romb natanko tedaj, ko se njegovi diagonalni sekata pod pravim kotom.
4. Točke  $A(3, -1, 4)$ ,  $B(2, -4, 2)$  in  $C(2, -3, 0)$  so oglišča trikotnika.
  - (a) Izračunaj koordinate težišča  $\Delta ABC$ .
  - (b) Določi koordinate točke  $D$  tako, da bo štirikotnik  $ABCD$  paralelogram.
  - (c) Izračunaj notranje kote paralelograma  $ABCD$ .
5. Kolikšen kot tvori telesna diagonalna kocke
  - (a) z osnovno ploskvijo kocke;
  - (b) z osnovno stranico kocke.
6. Izračunaj
$$\left( \left( \left( \vec{i} \times \vec{k} \right) \times \vec{i} \right) \times \vec{i} \right) \times \vec{k}.$$
7. Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(1, 3, 1)$  in  $C(2, 2, 5)$ .
8. Paralelogram določata diagonalni  $\vec{e} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  in  $\vec{f} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Izračunaj ploščino paralelograma.
9. Naj bodo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  paroma nekolinearni vektorji. Dokaži, da je  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  natanko tedaj, ko velja  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .
10. Izračunaj volumen
  - (a) paralelepipeda, ki ga določajo vektorji  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 0)$  in  $\vec{c} = (0, 1, 1)$ .
  - (b) tristrane piramide, ki jo določajo točke  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(1, 0, 0)$  in  $D(-3, 1, 1)$ .

Volumen izrazi z ustreznim mešanim produktom.

11. Dana sta vektorja  $\vec{x} = (0, 2, -2)$  in  $\vec{y} = (2, -4, 2)$ . Določi vektor  $\vec{z}$  tako, da bo pravokoten na vektor  $\vec{y}$ , da bo njegova dolžina  $2\sqrt{11}$  in da bo volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  in  $\vec{z}$  enak 24.

Samostojno reši: [1, Naloge: 154, 159, 161], [2, Naloge: 44, 49, 51] in [3, Naloge: 7, 8, 9].

## Primeri izpitnih nalog:

1. V pravilnem tetraedru  $ABCD$  naj bo  $T$  težišče trikotnika  $\triangle ABC$  in  $T'$  težišče trikotnika  $\triangle ACD$ .
  - (a) Dokaži, da sta vektorja  $\overrightarrow{AB}$  in  $\overrightarrow{CD}$  pravokotna in vektorja  $\overrightarrow{TT'}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  vzporedna.
  - (b) Izračunaj kot med stranskim robom in osnovno ploskvijo tetraedra.
  - (c) S pomočjo mešanega produkta izračunaj volumen tetraedra.
2. Dana je kocka  $ABCD A' B' C' D'$  z osnovno stranico dolžine  $a$ . Označimo z  $d$  telesno diagonalo  $AC'$  in z  $\pi$  ravnino, ki poteka skozi točke  $B'CD'$ .
  - (a) Z uporabo vektorskega in mešanega produkta izračunaj ploščino  $\triangle B'CD'$  in prostornino piramide  $B'CD'C'$ .
  - (b) Pod kakšnim kotom prebada diagonala  $d$  ravnino  $\pi$ ?
3. Dan je tetraeder (pravilna tristrana piramida) s prostornino  $V$ . Težišča stranskih ploskev naj bodo oglišča novega tetraedra. Kolikšna je njegova prostornina? Prostornino izrazi z  $V$ !

## Literatura

- [1] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.
- [2] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.
- [3] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.