Vaje 5: Algebra matrik

Naloge na vajah:

1. Dane so realne matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj izraze, ki obstajajo: $X+X^T$, $A+B$, AB, BA, AX, X^TX, XX^T, $2A+C^T$, X^TC.

2. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Izračunaj $(A+B)^n$, če matriki A in B komutirata.

3. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je simetrična, če je $A^T = A$ in je poševno simetrična, če je $A^T = -A$.

   (a) Kako izgledajo simetrične in poševno simetrične 3×3 matrike? Zapiši splošna primera.

   (b) Kakšne so naslednje matrike: $A + A^T$, $A - A^T$, A^TA?

   (c) Naj bosta A in B simetrični matriki. Kaj lahko poveš o matriki $AB - BA$?

8. Dokaži, da sta A in B obrnljivi matriki natanko tedaj, ko je AB obrnljiva matrika.

9. Dokaži: če sta A in B obrnljivi matriki, ki komutirata, potem tudi matrike A, B, A^{-1}, B^{-1} med sabo komutirajo.

10. Naj bo A obrnljiva matrika.

    (a) Dokaži, da je tudi A^T obrnljiva matrika in velja $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

    (b) Naj bo A simetrična obrnljiva matrika. Kaj lahko poveš o matriki A^{-1}?

Samostojno reši: [1, Naloge: 55, 56, 59], [3, Naloge: 125, 127, 129] in [2, Naloge: 313, 330, 345].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bosta A in B matriki razsežnosti 2×2, ki komutirata z matriko

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Pokaži, da je $AB = BA$.

2. Dani sta matriki $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ in $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Naj bo $A = 2XX^T + Y^TY$ in $B = XY + (XY)^T$.

    (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n.

    (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko B. Dokaži, da vsako tako matriko lahko zapišemo v obliki

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

    kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. Realno matriko dimenzije $n \times n$ imenujemo ortogonalna matrika, če velja $AA^T = A^TA = I$.

    (a) Pokaži, da je

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

    ortogonalna matrika dimenzije 2×2.

    (b) Dokaži, da je produkt ortogonalnih matrik spet ortogonalna matrika.

Literatura

[1] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.

[2] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[3] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.