# Vaje 7: Determinanta

## Naloge na vajah

1. Naslednjim matrikam izračunaj njihove determinante:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$,

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

   (d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

   (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$,

   (f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2. S pomočjo razvoja determinante po vrstici oz. stolpcu izračunaj

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -t \end{vmatrix}.$$

3. Vemo, da so števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 deljiva z 17. Dokaži, da je tudi naslednja determinanta deljiva z 17

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Izračunaj determinanto naslednje $n \times n$ matrike z rekurzivno formulo:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

5. Poišči splošna člena zaporedij, ki sta podani rekurzivno:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ in $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$,

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

6. Z uporabo determinant poišči inverza podanima matrikama:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži, da je $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

8. Naj bo $A$ poševno simetrična realna matrika velikosti $n \times n$, kjer je $n$ liho število. Ali je matrika $A$ obrnljiva?

9. Pravimo, da sta matriki $A$ in $B$ podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika $P$, da velja $B = P^{-1}AP$. Dokaži, da imata podobni matriki enako determinanto.

10. S Cramarjevim pravilom reši sistema:

    (a) $2x - y + z = 1,$
    $x + 2y - z = 2,$
    $x - y + 2z = 0.$

    (b) $\lambda x + y + z = 1,$
    $x + \lambda y + z = \lambda,$
    $x + y + \lambda z = \lambda^2.$

11. Z uporabo determinante izračunaj:

    (a) vektorski produkt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, kjer je $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$ in $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4)$;

    (b) mešani produkt $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$, kjer je $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 2, 1)$ in $\overrightarrow{c} = (3, 2, 4)$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 400($d$), 401($b$), 402($e$)] in [2, Naloge: 219, 221, 237].

Primeri izpitnih nalog:

1. Reši enačbo

$$\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & x+2 & -3 \\ 3 & x+3 & x+4 & -4 \\ 4 & 4 & x+5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 6 \\ -1 & 3x \end{vmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokaži, da velja $(1+x^2)\det A = (1-x^2)\det B$.

   (b) Izračunaj determinanto matrike $C$, če je $A^2CB^{-3} = 2\,(1-x^2)\,A^{-1}$.

3. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & -a \\ a & x & -a & -a \\ x & -a & -a & -a \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj $\det(A+B)$ in $\det(AB)$.

4. Naj bo $a$ realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$ :

$$\begin{vmatrix} -a & 2a & & & & \\ & -a & 2a & & & \\ & & -a & 2a & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a & 2a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

# Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.