Vaje 8: Vektorski prostor, podprostor in baza

Naloge na vajah:

1. Množica realnih n-teric $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \, | a_i \in \mathbb{R}\}$ je realni vektorski prostor za običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah:

$$\begin{gathered}(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \quad \text{in} \\ \lambda \, (a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)\end{gathered}$$

   kjer so $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

   (a) Katere od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}^5$ so vektorski podprostori?

$$\begin{array}{ll} U = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 = 0\} & W = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\} \\ V = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 \geq 0\} & Z = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 = a_3 = a_5\} \end{array}$$

   (b) V primerih, ko so dane množice vektorski prostori, določi njihovo dimenzijo in zapiši primer baze.

2. Poišči kako bazo vektorskega podprostora $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \, | x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$ v $\mathbb{R}^5$ in jo dopolni do baze celega vektorskega prostora $\mathbb{R}^5$.

3. Ali velja $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(V)$, če sta

$$U = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\} \quad \text{in} \quad V = \{(2, -1, 3, 3), (0, 1, -1, -1)\}.$$

4. Dani so vektorji:

$$\begin{array}{ll} \vec{a_1} = (1, 1, 2) & \vec{b_1} = (1, 0, 1) \\ \vec{a_2} = (1, 2, 3) & \vec{b_2} = (3, -2, -1) \\ \vec{a_3} = (0, 1, 3) & \vec{b_3} = (1, 0, 0) \end{array}$$

   Preveri, da tvorijo vektorji $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ bazo prostora $\mathbb{R}^3$ in z njimi izrazi vektorje $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

5. Množica vseh realnih polinomov $\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, če je seštevanje in množenje s skalarjem definirano s predpisom:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{m} b_i x^i = \sum_{i=1}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) \, x^i \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = 0 \,\text{za}\; n < i \leq \max\{n, m\} \\ b_i = 0 \,\text{za}\; m < i \leq \max\{n, m\} \end{array} \right. ,$$

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) \, x^i ,$$

   kjer so $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ in $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Ali je katera od podmnožic

$$U = \{p \in \mathbb{R}[X] \,|\, \mathrm{st}(p) \leq n\}, \; V = \{p \in \mathbb{R}[X] \,|\, \mathrm{st}(p) = n\} \text{ in}$$
$$W = \{p \in \mathbb{R}[X] \,| p(1) = p(2)\},$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}[X]$?

(b) Poišči bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}_n[x]$ in $\mathbb{R}[x]$.

6. Naj bo $M_2(\mathbb{C})$ množica kompleksih 2×2 matrik.

   (a) Poišči kako bazo kompleksnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je dimenzija tega prostora?

   (b) Poišči kako bazo realnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je dimenzija tega prostora?

7. Dokaži, da sta naslednji podmnožici 3×3 realnih matrik

$$U = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,| A^T = A\right\}, \quad V = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,| A^T = -A\right\}$$

   vektorska podprostora realnega vektorskega prostora $M_3(\mathbb{R})$. Določi tudi bazi in razsežnost podprostorov U in V.

8. Množica vseh zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, če je seštevanje in množenje s skalarjem definiramo s predpisom

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{in} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

   za vsaki $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Katere od podmnožic

$$U = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,| f(0) = 0\}, \qquad W = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,| f \text{ je soda funkcija}\},$$
$$V = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,| f(0) \geq 0\}, \qquad Z = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,| f \text{ je polinomska funkcija}\}$$

   so vektorski podprostori v $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

   (b) Ali sta $\left\{\sin^2 x, \frac{1}{4}\cos^2 x, 5\right\}$ in $\{xe^x, e^{2x}\}$ linearno neodvisni množici v vektorskem prostoru $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Samostojno reši: [1, Naloge: 204, 210, 237], [2, Naloge: 59, 63, 169] in [3, Naloge: 10, 15, 81].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.

(b) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

2. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) ; AXB^T = C\right\}$$
vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A + X) = \det A + \det X\}.$$
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Določi bazo in razsežnost podprostora V.
   (c) Dokaži, da se da vsaka matrika $Y \in M_2(\mathbb{R})$ zapisati v obliki $Y = \alpha E_{11} + X$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$ in X neka matrika iz V.

4. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ realnih $n \times n$ matrik je dana podmnožica $V = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|AX - XA^T = 0\right\}$, kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da je V realni vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) V primeru, ko je $n = 3$ in $A = E_{12} + E_{23}$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostora V.

5. V prostoru $\mathbb{R}_4[X]$ realnih polinomov stopnje največ 4 je dana množica:
$$U = \{p \in \mathbb{R}_4[X] ; p(1) = p'(0) = 0\}.$$
   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor in določi njegovo bazo in razsežnost.
   (b) Za vsako od množic A, B, C in D ugotovi ali je ogrodje ali je baza prostora U
$$\begin{aligned} A &= \left\{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^3 - x^2\right\}, \\ B &= \left\{x^4 + x^3, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\right\}, \\ C &= \left\{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\right\}, \\ D &= \left\{x^4 + x^3 - 2, 2x^4 + x^3 - 3, x^4 + x^3 + x^2 - 3, x^2 - 1\right\}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.