# Vaje 9: Vsota in presek vektorskih prostorov

## Naloge na vajah:

1. Naj bosta $U$ in $V$ vektorska podprostora v $\mathbb{R}^4$ določena kot

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,|x_2 + x_3 + x_4 = 0\}\ ,$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,|x_1 + x_2 = 0,\, x_3 - 2x_4 = 0\}\ .$$

   Določi vektorske podprostore $U, V, U \cap V$ in $U + V$. Določi razsežnost in zapiši primere njihovih baz!

2. V prostoru $\mathbb{R}_3\,[x]$ sta podani množici:

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3\,[x] \mid p''(1) = 2p(0),\, p(-1) = 0\}$$
$$V = \{p \in \mathbb{R}_3\,[x] \mid p''(1) + p(-1) = 2p(0)\}.$$

   Pokaži, da sta $U$ in $V$ podprostora $\mathbb{R}_3\,[x]$ in ugotovi v kakšnem odnosu sta $U$ in $V$ med sabo.

3. Naj bo $M_n\,(\mathbb{R})$ vektorski prostor $n\times n$ realnih matrik. Dokaži, da je $M_n\,(\mathbb{R}) = U \oplus V$, kjer je $U$ vektorski podprostor vseh simetričnih matrik, $V$ pa vektorski podprostor vseh poševno simetričnih matrik.

4. Naj bo $\mathcal{C}\,(\mathbb{R})$ vektorski prostor zveznih realnih funkcij, $U$ vektorski podprostor vseh sodih funkcij in $V$ vektorski podprostor vseh lihih funkcij. Dokaži, da je $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

5. Naj bosta $V = \{p \in \mathbb{R}\,[X]\,|p\,(1) = 0\}$ in $U = \{p \in \mathbb{R}\,[X]\,|p\,(2) = 0\}$ podprostora vektorskega prostora realnih polinomov $\mathbb{R}\,[X]$. Določi podprostora $V \cap U$ in $V + U$ ter vsakemu podprostoru $U, V, V \cap U$ in $V + U$ določi bazo.

6. V vektorskem prostoru $M_2\,(\mathbb{R})$ sta dana podprostora

$$V = \{X \in M_2\,(\mathbb{R})\,|E_{12}X = 0\}\,,$$
$$U = \mathcal{L}\,(E_{11} - E_{21}, E_{11} + E_{22}, E_{21} - E_{22}, E_{11} + E_{21} + E_{22})\,.$$

   Poišči baze podprostorov $U, V, V \cap U$ in $V + U$.

## Samostojno reši: [1, Naloge: 239, 250, 254], [2, Naloge: 82, 83, 85] in [3, Naloge: 24, 26, 82].

## Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bosta $U$ in $V$ podprostora v $\mathbb{R}_3\,[X]$; $U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a + c + d = 0\}$ in $V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a + b = 0, c - 2d = 0\}$. Poišči primere baz prostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$. Ali je vsota podprostorov $U$ in $V$ direktna?

2. Naj bosta $U = \{p \in \mathbb{R}_3\,[X]\,|\int_{-1}^{1} p\,(x)\,dx = 0\}$ in $V = \{p \in \mathbb{R}_3\,[X]\,|p'\,(1) = 0\}$ vektorska podprostora $\mathbb{R}_3\,[X]$. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

3. V prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 sta podana vektorska podprostora:

$$U = \mathcal{L}\left\{x^3 + 2x^2 + x - 1,\, x^3 - x^2 + 2x + 1,\, x^3 + 8x^2 - x - 5\right\},$$
$$V = \left\{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \middle|\, 2a_3 - a_2 - a_1 = a_0,\, a_3 - a_2 = a_1,\, a_3 = a_0\right\}.$$

Določi baze in razsežnosti prostorov $U$, $V$, $U \cap V$ in $U + V$. Ali je vsota direktna?

4. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|AX = XA\}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|A^T X = -XA^T\}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Preveri, da sta $U$ in $V$ vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in določi njuni bazi.

   (b) Dokaži $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

5. Za matriko $A \in M_3(\mathbb{R})$ označimo z $A^S$ matriko, ki je prezrcaljena čez stransko diagonalo. Naj bosta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podmnožici $M_3(\mathbb{R})$ oblike

$$\mathcal{S} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|A = A^S\right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{T} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|A^T = A^S\right\}.$$

Dokaži, da sta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podprostora vektorskega prostora $M_3(\mathbb{R})$, določi tudi baze prostorov $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Koliko je dimenzija prostora $\mathcal{S} + \mathcal{T}$?

6. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U$ množica vseh matrik, ki komutirajo z matrikama $A$ in $B$ ter $V$ množica tistih matrik, ki komutirajo vsaj z eno od $A$ in $B$.

   (a) Dokaži, da je $U$ vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši njegovo bazo.

   (b) Dokaži, da je $V$ ni vektorski podprostor. Določi najmanjši vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$, ki vsebuje $V$. Zapiši tudi njegovo bazo!

# Literatura


[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.