Vaje 10: Linearne preslikave

Naloge na vajah:

1. Katere izmed naslednjih preslikav iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$ so linearne:

   (a) $\mathcal{A} : (x, y) \to (x, 0)$,

   (b) $\mathcal{B} : (x, y) \to (0, x)$,

   (c) $\mathcal{C} : (x, y) \to (x, y + 2)$,

   (d) $\mathcal{D} : (x, y) \to (|x| , y)$,

   (e) $\mathcal{E} : (x, y) \to (x, \sin y)$.

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definirana s predpisoma $\mathcal{A}(1, 0) = (1, 1)$ in $\mathcal{A}(0, 1) = (-1, 2)$. Kako se preslika kvadrat z oglišči $(0, 0) , (1, 0) , (0, 1)$ in $(1, 1)$?

3. Naj bo operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podan s predpisom

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{a})\,\overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{x} .$$

   Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator. Določi jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in zalogo vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ linearnega operatorja $\mathcal{A}$, če je $\overrightarrow{a} = (1, 0, 1)$.

4. Naj bo $\mathbb{R}[X]$ vektorski prostor realnih polinomov in $\mathbb{R}_n[X]$ njegov podprostor polinomov stopnje $\leq n$.

   (a) Dokaži, da je odvajanje $\mathcal{D}p = p'$ linearni operator na $\mathbb{R}[X]$ oz. $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Na obeh vektorskih prostorih določi jedro in sliko linearnega operatorja $\mathcal{D}$. Ali je operator $\mathcal{D}$ injektiven oz. surjektiven?

   (c) Na katerem prostoru je $\mathcal{D}$ nilpotenten, t.j. $\mathcal{D}^m = 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

5. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}(X) = \frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in izračunaj $\mathcal{A}^2$.

   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Samostojno reši:
[1, Naloge: 267, 285, 302], [2, Naloge: 88, 90, 105] in [3, Naloge: 220, 222, 226].

Primeri izpitnih nalog:

1. Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$ je definirana s predpisom:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + (c + d)\,x + (a + b - c - d)\,x^2 + (a + b + c + d)\,x^3.$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.

(b) Poišči podprostora $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ in $\operatorname{Im} \mathcal{T}$, zapiši njuno bazo. Koliko je njuna dimenzija?

2. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$

definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

(b) Določi podprostora $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ in $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?

3. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p'(1) & p(-1) \\ p(1) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

(a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

(b) Določi podprostora $\operatorname{im} \mathcal{A}$ in $\ker \mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.