Vaje 11: Linearne preslikave in matrike

Naloge na vajah:

1. (a) Določi matriko, ki pripada zasuku $\mathcal{A}$ ravnine $\mathbb{R}^2$ za kot φ okrog koordinatnega izhodišča v pozitivnem smislu, v standardni bazi $\{(1,0),(0,1)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$.

   (b) Izračunaj koordinatne točke $\mathcal{A}x$, kjer je $x=(1,2)$ in $\mathcal{A}$ zasuk ravnine za za $\frac{\pi}{4}$ v pozitivnem smislu okrog izhodišča.

2. Določi matriko ki pripada odvajanju D na prostoru polinomov $\mathbb{R}_n[X]$ v standardni bazi.

3. Preslikava $\mathcal{T}: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX - XA$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Poišči matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{T}$ v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

4. Bodita $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ endomorfizma vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$, podana z
$$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2,x_1,x_4,x_3)\ , \quad \mathcal{B}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2,x_1,x_3,-x_4)\ .$$
   Izračunaj endomorfizma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ter zapiši matrike, ki pripadajo tem operatorjem v standardni bazi.

5. Določi kako bazo zaloge vrednosti in bazo jedra linearne preslikave $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki ji v standardni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ pripada matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Poišči matriko prehoda P in njeno inverzno matriko P^{-1} med standardno bazo v $\mathbb{R}^3$ in bazo $\Sigma = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

7. Poišči matriko odvajanja v $\mathbb{R}_4[X]$ za bazo
$$\Sigma = \{1, x^3 - x^2, x^4 + x^3, x - x^4, x\}.$$

8. Naj bosta $B = \{1, x, x^2\}$ in $\Sigma = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ bazi vektorskega prostora polinomov $\mathbb{R}_2[X]$.

   (a) Zapiši matriko prehoda iz baze B v bazo Σ. Izrazi polinom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ kot linearno kombinacijo polinomov iz Σ.

(b) Naj bo endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[X]$ definiran s predpisom

$$\mathcal{A}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = (a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)\, x + a_2 x^2 .$$

Določi matriko,ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi B. Kakšna matrika mu pripada v bazi Σ?

Samostojno reši:

[1, Naloge: 423, 429, 447], [2, Naloge: 178, 187, 191] in [3, Naloge: 245, 256, 271].

Primeri izpitnih nalog:

1. Preslikava $\mathcal{T}: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$, za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.

   (b) Poišči matriko, ki preslikavi $\mathcal{T}$ pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

   (c) Določi tudi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$.

2. Linearni preslikavi $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $\{(1,2), (1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, zapiši njuno bazo.

   (b) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$.

3. Preslikava $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)\,1 + (2x_1 + x_2 - x_4)X + (4x_1 + 2x_2 - 2x_4)\,X^2.$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi matriko A, ki pripada tej linearni preslikavi glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Poišči poljubno bazo Σ jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Koliko je $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$?

   (c) Dopolni Σ do urejene baze Σ' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}_2[X]$. Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Σ' in Π'?

4. Bodi $\mathcal{A}$ linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^3$, ki preslika vektorje e_1, e_2, e_3 urejene baze Σ v vektorje e_2, e_3, e_1 v tem vrstnem redu. V $\mathbb{R}^3$ imamo tudi urejeno bazo $\Pi = \{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$. Zapiši matriko, ki je prirejena transformaciji $\mathcal{A}^{2004}$ v urejeni bazi Π.

5. Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[X]$ je podan s predpisom: $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1+x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x+x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2+x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$ in $\mathcal{A}(x^3+x^4) = -2x^3 + 2x^4$. Poišči matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_4[X]$ in določi tudi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

6. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = xp'(x) - p(x).$$

Pokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava, določi matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi ter določi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.