Vaje 11: Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naloge na vajah:

1. (a) Dokaži, da je $\lambda \in \mathbb{F}$ lastna vrednost operatorja $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko operator $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ ni injektiven.

   (b) Naj bo V končno razsežen vektorski prostor. Dokaži, da je $\lambda \in \mathbb{F}$ lastna vrednost operatorja $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$, kjer je A pripadajoča matrika operatorja $\mathcal{A}$.

2. Poišči lastne vrednosti linearne preslikave $\mathcal{A} : V \to V$, ki zadošča:

   (a) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$,

   (b) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$.

3. Naj bo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorski prostor realnih zaporedij in $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ linearni operator, ki je definiran s predpisom:

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) = (a_2, a_1, a_4, a_3, \cdots, a_{2n}, a_{2n-1}, \cdots) .$$

   Poišči njegove lastne vrednosti nekatere pripadajoče lastne vektorje.

4. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje ter podobno diagonalno matriko matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

5. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje čez ravnino $x + y + z = 0$.

   (a) Poišči lastne vrednosti in določi lastne podprostore zrcaljenja $\mathcal{A}$.

   (b) Zapiši bazo prostora $\mathbb{R}^3$ v kateri zrcaljenju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika.

6. Poišči karakteristični in minimalni polinom matrike

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Kakšen mora biti minimalni polinom matrike A, da se le ta lahko diagonalizira.

7. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dokaži ali ovrzi:

   (a) Če imata matriki A in B enak minimalni polinom, sta podobni.

   (b) Če imata matriki A in B enak karakteristični in minimalni polinom, sta podobni.

Pomoč: oglej si naslednja para matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Določi vse $a \in \mathbb{C}$, pri katerih ima kompleksna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vsaj eno lastno vrednost enako 0. Za doblene $a \in \mathbb{C}$ poišči minimalni polinom matrike A, njeno jordansko matriko A' in matriko prehoda P.

9. Karakteristični polinom operatorja $A : \mathbb{C}^{10} \to \mathbb{C}^{10}$ je $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^4 (\lambda + 2)^5 (\lambda + 1)$, njegov minimalni polinom pa je $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 2)^3 (\lambda + 1)$. Napiši vse možne jordanske matrike operatorja A do podobnosti natančno.

Samostojno reši: [1, Naloge: 485, 491, 601], [2, Naloge: 266, 268, 277] in [3, Naloge: 284, 287, 303].

Primeri izpitnih nalog:

1. Linearni transformaciji $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada matrika

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -2 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje transformacije $\mathcal{A}$ ter opiši njeno geometrijsko delovanje.

   (b) Ali obstaja kaka baza prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 - a_1 + 2a_2)1 + (a_0 + a_2)\,x + (-a_0 + 2a_1 - 2a_2)\,x^2.$$

   (a) Določi matriko A, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Zapiši karakteristični in minimalni polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A. Ali obstaja diagonalna matrika podobna matriki A? Če obstaja, jo tudi zapiši.

3. Naj bo $\mathcal{A}$ pravokotna projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $x + 2y + z = 0$.

   (a) Poišči lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ in določi njihove lastne podprostore.

   (b) Zapiši tako bazo prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika in to diagonalno matriko tudi zapiši.

4. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Določi karakteristični polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje realne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0.$$

   Ali je matrika A podobna diagonalni matriki? Če je, kateri?

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.